2 BOOLOVA ALGEBRA

Boolova algebra je ena izmed algebrskih struktur.

Definicija 2.1. ***Boolova algebra*** *je množica* S, *ki ima vsaj dva različna elementa* 0 *in* 1, *skupaj z dvema dvočlenima operacijama:* $\vee$ *in* $\wedge$ *ter enočleno operacijo* $'$, *ki zadoščajo naslednjim zahtevam:*

1. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ *asociativnost* $\vee$
   $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ *asociativnost* $\wedge$

2. $x \vee y = y \vee x$ *komutativnost* $\vee$
   $x \wedge y = y \wedge x$ *komutativnost* $\wedge$

3. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ *dve vrsti distributivnosti*

4. *obstaja poseben element* $0 \in S$ *z lastnostjo:*
   $\forall x \in S: \quad x \vee 0 = x$ *obstoj nevtralnega elementa za* $\vee$
   obstaja poseben element $1 \in S$ *z lastnostjo:*
   $\forall x \in S: \quad x \wedge 1 = x$ *obstoj nevtralnega elementa za* $\wedge$

5. *Za vsak* $x \in S$ *obstaja komplement* x', *ki je določen z lastnostima*
   $x \vee x' = 1 \qquad x \wedge x' = 0.$

Na kratko Boolovo algebro opišemo z nizom $B = (S, \vee, \wedge, ', 0, 1)$.

Zgled 2.2. *Naj bo* A *dana množica. Postavimo* $S = \mathcal{P}A$ *in definirajmo operacije* $\vee$,$\wedge$ *in* $'$ *med podmnožicami množice* A *takole:*

$$\begin{aligned} X \vee Y &:= X \cup Y \\ X \wedge Y &:= X \cap Y \\ X' &:= X^c \\ 0 &:= \phi, \\ 1 &:= A \end{aligned}$$

Hitro se lahko prepričamo, da je $(\mathcal{P}A, \cup, \cap, ^c, \phi, A)$ *Boolova algebra.*

Zgled 2.3. *Najmanjša Boolova algebra je množica* $S = \{0, 1\}$, *kjer je* $0' = 1$ *in* $1' = 0$, *operaciji* $\vee$ *in* $\wedge$ *pa definirani s tabelama:*

$$\begin{array}{c|cc} \vee & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{in} \quad \begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Sistem $(\{0, 1\}, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ *je Boolova algebra.*

Zgled 2.4. *Bodita m in n dani naravni števili in naj bo S množica vseh 0-1 matrik velikosti $m \times n$ (z m vrsticami in n stolpci). Operaciji $\vee$ in $\wedge$ definiramo členoma (kot smo to naredili v poglavju o relacijah). Pri tem vlogo elementa 0 igra ničelna matrika (taka, ki ima same ničle), vlogo elementa 1 pa taka, ki ima same enice. Če je $M \in S$, je M' matrika, v kateri so vse enice zamenjane z ničlami in vse ničle z enicami. Torej, če označimo* $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ *in* $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$*, postane* $(S, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *Boolova algebra.*

Zgled 2.5. *D_{30} naj bo množica vseh deliteljev števila 30, torej $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Operaciji $\vee$ in $\wedge$ definirajmo takole:*

$$
\begin{aligned}
k \vee l &: = v\,(k, l) \\
k \wedge l &: = d\,(k, l)\,,
\end{aligned}
$$

kjer simbola $v\,(k, l)$ in $d\,(k, l)$ predstavljata najmanjši skupni večkratnik in največji skupni delitelj števil k in l. Operacija komplementiranja: $k' = \frac{30}{k}$. Vlogo posebnega elementa 0 igra največji skupni delitelj vseh elementov množice S, to je 1, vlogo posebnega elementa 1 pa igra število 30. Če bi preverili še lastnosti tako definiranih operacij, bi ugotovili, da je $(D_{30}, v\,(.,.)\,, d\,(.,.)\,,', 1, 30)$ Boolova algebra.

Oglejmo si še nekaj splošnih lastnosti Boolove algebre.

Lastnosti Boolove algebre

Do nadaljnjega naj bo $(S, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ poljubna Boolova algebra

1. Elementa 0 in 1 sta enolično določena.

   Denimo, da imamo dve različni "ničli": 0_1 in 0_2, ki sta obe nevtralna elementa za operacijo $\vee$. Potem je za vsak $x \in S$ in za vsak $y \in S$ izpolnjeno

$$
\begin{aligned}
x \vee 0_1 &= x \\
0_2 \vee y &= y
\end{aligned}
$$

   Če v prvi enakosti namesto x vstavimo 0_2 in v drugi 0_1 namesto y, dobimo, da je $0_1 = 0_2$. Podobno bi pokazali enoličnost "enice".

2. Komplementiranje je enolično.

3. **Dualni izraz (izrek)** k danemu izrazu (izreku) v Boolovi algebri je izraz (izrek), ki ga dobimo tako, da v izrazu (izreku) zamenjamo vlogi $\vee$ in $\wedge$, ter vlogi 0 in 1. Če izreku v Boolovi algebri priredimo dualni izrek, spet dobimo veljavni izrek.

   Opazimo namreč, da vsi aksiomi nastopajo v dualnih parih.

4. Za poljubne $x, y \in S$ velja:
   a) $x \vee x = x$ $\quad x \wedge x = x$ $\quad$ idempotentnost operacij $\vee$ in $\wedge$
   b) $x \vee 1 = 1$ $\quad x \wedge 0 = 0$
   c) $(x')' = x$
   d) $0' = 1$, $1' = 0$
   e) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ $\quad (x \wedge y)' = x' \vee y'$ $\quad$ De Morganova zakona
   f) $x \vee (x \wedge y) = x$ $\quad x \wedge (x \vee y) = x$ $\quad$ zakona absorbcije

5. Relacija **delnega reda** na množici X je relacija na množici X, ki je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Boolova algebra je **delno urejena** množica za relacijo $\dot{\leq}$, ki jo definiramo takole:

$$x \dot{\leq} y \iff x \vee y = y \tag{1}$$

   ali ekvivalentno

$$x \dot{\leq} y \iff x \wedge y = x. \tag{2}$$

   Preverimo, da smo (recimo s predpisom (1))s tem res definirali relacijo delnega reda.
   a) refleksivnost: $x \vee x = x$ (idempotentnost), zato je $x \dot{\leq} x$.
   b) antisimetričnost: denimo, da je $x \dot{\leq} y$ in $y \dot{\leq} x$. torej $x \vee y = y$ in $y \vee x = x$. Zaradi komutativnosti $\vee$ mora biti $x = y$.
   c) tranzitivnost: naj bo $x \dot{\leq} y$ in $y \dot{\leq} z$. Radi bi dobili, da je tudi $x \dot{\leq} z$.
   $x \dot{\leq} y \Rightarrow x \vee y = y$
   $y \dot{\leq} z \Rightarrow y \vee z = z$
   Poračunajmo: $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$ od koder sledi, da je $x \dot{\leq} z$.

   Za konec pokažimo še, da sta definiciji urejenosti (1) in (2) ekvivalentni. Naj bo $x \dot{\leq} y$ po definiciji (1), torej je $x \vee y = y$. Izračunajmo $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ po zakonu o absorbciji (4.f) in posledično je $x \dot{\leq} y$ po definiciji (2). Obratno smer bi preverili povsem analogno.

Boolove funkcije

Naj bo $B = \{0, 1\}$ najmanjša Boolova algebra, kot smo jo definirali v zgledu 2.3. Pri danem naravnem številu n, naj bo $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,;\ x_i \in B,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n \text{ faktorjev}}$. Definirajmo preslikavo $f : B^n \to B$. Tako preslikavo imenujemo **Boolova funkcija**. Npr.: če je $n = 3$, je primer Boolove funkcije

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2') \vee x_3$$

Pišimo sedaj $U_n = \{f;\ f : B^n \to B\}$. Če med funkcijami te množice definiramo operacije $\vee$, $\wedge$, in $'$:

$$\begin{aligned} f, g &\in U_n \\ f \vee g &: (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \vee g(x_1, \ldots, x_n) \\ f \wedge g &: (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \wedge g(x_1, \ldots, x_n) \\ f' &: (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f(x_1, \ldots, x_n))' \end{aligned}$$

dobimo spet Boolovo algebro $(U_n, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$, v kateri vlogo elementov $\mathbf{0}$ in $\mathbf{1}$ igrata konstantni funkciji, ena z vrednostjo 0 in druga z vrednostjo 1.