Kazalo

1 DVOMESTNE RELACIJE

Relacije v grobem pojmujemo kot povezave med elementi danih množic.

Relacija (n-mestna) je podmnožica kartezičnega produkta $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, kjer so X_1, X_2, $\ldots$, X_n dane množice.

Dvomestna relacija R iz množice X v množico Y je podmnožica kartezičnega produkta $X \times Y$. Simbolično: $R \subseteq X \times Y$. Zapis xRy preberemo: x je v relaciji R z y. Uporabljamo tudi zapis $(x, y) \in R$ ali pa za konkretne relacije npr.: $x \leq y$, $A \subseteq B$, $m|n$ in podobno. V bodoče bomo uporabljali izraz relacija (brez dvomestna). Če množici X in Y sovpadata in je $R \subseteq X \times X$, govorimo o relaciji R na množici X.

Zgled 1.1. *Naj bo $X = \{1, 2, 3\}$ in $Y = \{a, b\}$. Relacijo R definirajmo kot*

$$R = \{(1, b)\,,\ (1, a)\,,\ (2, a)\}\,.$$

Za to relacijo velja: $1Rb$, $1Ra$ in $2Ra$.

Domena D_R relacije $R \subseteq X \times Y$ je množica vseh prvih koordinat elementov relacije R in je očitno podmnožica množice X. **Zaloga** vrednosti Z_R relacije R je množica vseh drugih koordinat elementov relacije R in je podmnožica v Y.

Zgled 1.2. *Naj bo $X = \{2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ in $R = \{(x, y)\,;\ x|y\}$. Zapis $x|y$ pomeni: x deli y ali z drugimi besedami: y je deljiv z x. Torej je*

$$R = \{(2, 4)\,, (2, 6)\,, (3, 3)\,, (3, 6)\,, (4, 4)\}\,.$$

Pri tem je $D_R = \{2, 3, 4\}$ in $Z_R = \{3, 4, 6\}$.

Inverzna relacija k dani relaciji $R \subseteq X \times Y$ je relacija $R^{-1} \subseteq Y \times X$, ki je določena s predpisom

$$xR^{-1}y \iff yRx$$

ali pa: $(x, y) \in R^{-1}$ natanko tedaj ko je $(y, x) \in R$.

Za relacijo R iz primera 1.2 je $R^{-1} = \{(4, 2)\,, (6, 2)\,, (3, 3)\,, (6, 3)\,, (4, 4)\}\,.$

Očitno je $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$, $D_{R^{-1}} = Z_R$ in $Z_{R^{-1}} = D_R$.

1.1 Operacije z dvomestnimi relacijami

1. Bodita $R \subseteq X \times Y$ in $S \subseteq X \times Y$ relaciji iz množice X v množico Y. Ker je vsaka relacija v svojem bistvu množica, so takoj smiselne operacije **unija**, **presek** in **komplement**:

$R \cup S$, $R \cap S$ in $R' = (X \times Y) \backslash R$.

Dokaj očitne lastnosti teh operacij so:

$$\begin{aligned}(R \cup S)^{-1} &= R^{-1} \cup S^{-1} \\ (R \cap S)^{-1} &= R^{-1} \cap S^{-1} \\ (R')' &= R \\ (R \cup S)' &= R' \cap S' \\ (R \cap S)' &= R' \cup S'.\end{aligned}$$

2. Produkt relacij $R \subseteq X \times Y$ in $S \subseteq Y \times Z$ je relacija $R * S \subseteq X \times Z$, za katero velja

$$x \in X \text{ je v relaciji } R * S \text{ z elementom } z \in Z$$
$$\text{natanko tedaj, ko obstaja tak } y \in Y, \text{ za katerega je } xRy \text{ in } ySz.$$

Z drugimi besedami: obstaja y, preko katerega z R in S pridemo od x do z.

Lastnosti produkta relacij:

1. V splošnem $R * S \neq S * R$.
   Vzemimo $X = Y = Z = \{x;\ x \text{ je državljan-ka Slovenije}\}$ in
   $xRy \iff y$ je brat od x
   $xSy \iff y$ je oče od x
   S premislekom ugotovimo, da iz $x\ R * S\ y$ sledi, da ima x brata z in je y oče od x, medtem ko iz $x\ S * R\ y$ sledi, da ima oče z (od x) brata y in je torej y stric od x.
2. $R * (S * Q) = (R * S) * Q$ asociativnost
3. $R * (S \cup Q) = R * S \cup R * Q$ distributivnost
   dogovor: operacija $*$ je višje prioritete kot $\cup$ ali $\cap$, zato ni potreben oklepaj!
4. $R * (S \cup Q) \subseteq R * S \cup R * Q$ Pozor: ne velja enačaj!
5. $(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$

Zveza med produktom relacij in kompozitumom funkcij

Naj bosta dani funkciji $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$. Potem sta grafa

$$\begin{aligned}G_f &= \{(x, f(x));\ x \in X\} \subseteq X \times Y \qquad \text{in} \\ G_g &= \{(x, g(x));\ x \in Y\} \subseteq Y \times Z\end{aligned}$$

relaciji. Pišimo $R = G_f$ in $S = G_g$. Nato je

$$\begin{aligned} x\ R * S\ z &\iff \exists y \in Y : xRy \text{ in } ySz \\ &\iff \exists y \in Y : y = f(x) \text{ in } z = g(y) \\ &\iff z = g(f(x)) \\ &\iff x\ G_{g \circ f}\ y \end{aligned}$$

Če je funkcija $f : X \to Y$ bijekcija, obstaja funkcija $f^{-1} : Y \to X$. Za funkciji f in f^{-1} velja: $f \circ f^{-1} = id_Y$ in $f^{-1} \circ f = id_X$. Za obstoj relacije R^{-1} nismo zahtevali nobenih posebnih pogojev (pa tudi potrebno ni bilo, ker je R^{-1} avtomatično relacija; medtem ko je f^{-1} le relacija in ne funkcija, če f ni bijektivna). Zaradi večje svobode pri relacijah pa se lahko zgodi, da se $R * R^{-1}$ razlikuje od identične relacije $I = \{(x, x) ; x \in X\}$.

Zgled 1.3. *Naj bo $X = \{a, b, c\}$ in $R = \{(a, c), (b, c)\}$. Potem je $R^{-1} = \{(c, a), (c, b)\}$ in $R * R^{-1} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, c)\} \neq I_X = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.*

1.2 Predstavitev relacij

1. Z **grafom** kot podmnožico kartezičnega produkta.

2. Z **relacijskim grafom** (če je $R \subseteq X \times X$). Od točke x_i do točke x_j poteka usmerjena povezava natanko takrat ko je $x_i R x_j$.

3. Z **relacijsko matriko** $M_R = [m_{ij}]$, katere element m_{ij}, ki leži v i-ti vrstici in v j-tem stopcu, je lahko le 0 ali 1 in velja:

$$m_{ij} = 1 \iff x_i R y_i$$

Matrika M_R ima m vrstic in n stolpcev, če je $R \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \times \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

Recimo, da je $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ in

$$R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a), (3, d)\} \subseteq X \times Y.$$

Potem se relacijska matrika M_R glasi:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Relacijska matrika je zelo primerna za predstavitev relacij v računalniku. Kako pa bomo z njimi računali? Oziroma, kako izračunati relacijske matrike, ki pripadajo računskim operacijam z relacijami?

Definirajmo računski operaciji $\vee$ in $\wedge$ na množici $\{0,1\}$ s tabelama:

$$\begin{array}{c|cc} \vee & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{in} \quad \begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Operaciji se obnašata analogno kot logični operaciji "ali" ter "in". S pomočjo teh dveh operacij vpeljemo operaciji $\vee$ in $\wedge$ tudi na matrikah in sicer tako, da jih izvajamo na istoležnih členih. Recimo, da sta M_1 in M_2 dani matriki enake velikosti:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Potem je

$$M_1 \vee M_2 = \begin{bmatrix} 0 \vee 0 & 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$M_1 \wedge M_2 = \begin{bmatrix} 0 \wedge 0 & 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zelo hitro ugotovimo, da je

$$\begin{aligned} M_{R \cup S} &= M_R \vee M_S \\ M_{R \cap S} &= M_R \wedge M_S. \end{aligned}$$

Omenimo še eno preprosto operacijo na matriki: **transponiranje.** To je operacija, ki v matriki zamenja vlogo vrstic in stolpcev, npr.:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} \end{bmatrix}.$$

In takoj opazimo, da je $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$.

Malo bolj zapleteno je izračunati matriko produkta. Velja namreč: če je $M_R = [a_{ij}]$ in $M_S = [b_{ij}]$, in če z m_{ij} označimo element matrike M_{R*S} v i-ti vrstici in j-tem stolpcu, je

$$m_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}).$$

Kdaj bo namreč $m_{ij} = 1$ oziroma $x_i R * S y_j$? To bo takrat, ko bo za vsaj en z_k izpolnjeno $x_i R z_k$ in $z_k S y_j$. To pa pove, da mora za vsaj en $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ veljati $a_{ik} \wedge b_{kj} = 1$. To pa je ekvivalentno dejstvu, da je

$$\bigvee_{k=1}^{p} (a_{ik} \wedge b_{kj}) = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}) = 1.$$

Tako smo prišli še do ene operacije z matrikami, označili jo bomo

$$M_{R*S} = M_R \times M_S.$$

Še enkrat z besedami povejmo, kako izračunamo ij-ti element matrike $M_R \times M_S$. Ta je "disjunkcija ($\vee$)" "konjunkcij($\wedge$)"elementov i-te vrstice matrike M_R in j-tega stolpca matrike M_S.

Zgled 1.4. *Naj bodo dane množice $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ in $Z = \{e, f, g\}$. Bodita $R = \{(1, b), (2, a)\} \subseteq X \times Y$ in $S = \{(a, f), (b, g)\} \subseteq Y \times Z$. Izračunajmo matriko M_{R*S} iz matrik M_R in M_S.*

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_R \times M_S &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underline{1} & \underline{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & \underline{\underline{0}} \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & \underline{\left(\underline{1} \wedge \underline{\underline{0}}\right) \vee \left(\underline{0} \wedge \underline{\underline{1}}\right)} \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Podčrtani element v drugi vrstici in tretjem stolpcu smo izračunali iz elementov druge vrstice matrike M_R in elementov tretjega stolpca matrike M_S

1.3 Lastnosti relacij na dani množici (R $\subseteq X \times X$)

1. **sovisnost**

   Relacija R je sovisna, če sta poljubna različna elementa množice X primerljiva:

   $$\forall x, y \in X : \ x \neq y \Rightarrow xRy \text{ ali } yRx$$

   V jeziku relacijskih grafov bi lahko rekli: med poljubnima med seboj različnima točkama x in y je vsaj ena povezava.

   Primeri takih relacij: $<$ ali $\leq$ na kaki podmnožici realnih števil

2. **stroga sovisnost**

   R je strogo sovisna, če sta poljubna elementa med seboj primerljiva. To pomeni: poljubna različna elementa, pa tudi vsak element sam s seboj. V relacijskem grafu je vsaj ena povezava med poljubnima točkama, vsaka točka pa ima tudi zanko (povezana je sama s seboj)

$$\forall x, y \in X : xRy \text{ ali } yRx.$$

Očitno je vsaka strogo sovisna relacija tudi sovisna relacija.

Primeri: $\leq$ na dani podmnožici $\mathbb{R}$, $=$ na poljubni neprazni množici, $|$ na $\mathbb{N}$

3. **refleksivnost**

   Vsak element množice X je v relaciji s samim seboj. Simbolično:

   $$\forall x \in X : xRx.$$

   Na relacijskem grafu ima vsaka točka zanko.

   Primeri: $\leq$ na dani podmnožici $\mathbb{R}$, $=$ na poljubni množici, $\subseteq$ na potenčni množici dane množice, $|$ na $\mathbb{N}$

4. **irefleksivnost**

   Noben element množice X ni v relaciji s samim seboj.

   $$\forall x \in X : \neg xRx$$

   Nobena točka relacijskega grafa nima zanke.

   Primer: $<$ na kaki podmnožici $\mathbb{R}$

5. **simetričnost**

   Če je neki par (x, y) v simetrični relaciji, je v relaciji tudi par (y, x).

   $$\forall x, y \in X : \ xRy \Rightarrow yRx.$$

   Med poljubnima točkama relacijskega grafa bodisi ni nobene povezave ali pa sta povezavi v obe smeri.

   Primer: $=$

6. **antisimetričnost**

   Za različna elementa množice X ne more biti hkrati izpolnjeno xRy in yRx.
   $\forall x, y \in X : xRy \text{ in } yRx \Rightarrow x = y$

   Med poljubnima različnima točkama relacijskega grafa ni nikoli dveh povezav.

   Primeri: $\leq$, na dani podmnožici $\mathbb{R}$, $\subseteq$ na potenčni množici neke dane množice, $|$ na množici $\mathbb{N}$

7. **tranzitivnost**

   Če je x v relaciji z y ter nadalje tudi y v relaciji z elementom z, mora biti tudi x v relaciji z elementom z.

$$\forall x, y, z \in X : xRy \text{ in } yRz \Rightarrow xRz$$

   V relacijskem grafu to pomeni: če lahko v smeri puščic pridemo iz točke x do z preko točke y, lahko pridemo tudi direktno od x do z.

   Primeri: $=$, $<$, $\leq$, $\subseteq$, $|$.

1.4 Ekvivalenčna relacija

Posebej pomemba med relacijami na dani množici je taka, ki je **refleksivna, simetrična in tranzitivna.** Taki relaciji rečemo **ekvivalenčna relacija** in jo pogosto označimo z znakom $\sim$. Najpreprostejši primer take relacije je relacija enakosti med elementi dane množice. Pogosto pa primerjamo elemente dane množice samo glede enakosti določenih lastnosti in ne nujno vseh in to nas ponavadi pripelje do ekvivalenčne relacije.

Zgled 1.5. *Naj bo $X = \mathcal{P}A$, kjer je A dana množica. Definirajmo relacijo $\sim$ med podmnožicami množice A (t.j.: med elementi $\mathcal{P}A$)*

$$\begin{gathered} C \subseteq A \textit{ in } C \sim \phi \Rightarrow C = \phi \\ \phi \neq C, D \subseteq A \\ C \sim D \iff C \textit{ in } D \textit{ sta enako močni} \\ \iff \textit{iz } C \textit{ v } D \textit{ obstaja bijekcija} \end{gathered}$$

Prepričajmo se, da je ta relacija ekvivalenčna.

1. *Ker je identična preslikava $i_C : C \to C$, $i_C(x) = x$ bijekcija, je $C \sim C$. Torej je $\sim$ refleksivna.*

2. *Če je $C \sim D$, to pomeni, da obstaja bijekcija $f : C \to D$. Vemo, da je potem tudi $f^{-1} : D \to C$ bijekcija, kar nam zagotavlja, da je tudi $D \sim C$. Vidimo, da je $\sim$ simetrična.*

3. *Nazadnje naj bo $C \sim D$ in $D \sim E$; torej imamo bijakciji $f : C \to D$ in $g : D \to E$. Vemo, da je kompozitum bijekcij spet bijekcija, torej je $f \circ g : C \to E$ spet bijekcija in sta zato tudi C in E enako močni, torej je tudi $C \sim E$. S tem smo preverili tranzitivnost relacije $\sim$.*

Denimo, da imamo podano ekvivalenčno relacijo $\sim$ na množici X. **Ekvivalenčni razred** elementa $x \in X$ je množica vseh tistih $y \in X$, ki so v relaciji z elementom x.

$$[x] = \{y \in X;\ y \sim x\}$$

Zgled 1.6. *Naj bo* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in* $R =$ $\{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)\}$. *Zlahka se prepričamo, da je* R *ekvivalenčna relacija, ker je refleksivna, simetrična in tranzitivna.*

Izračunajmo ekvivalenčne razrede posameznih elementov.

$[1] = \{1, 3, 5\} = [3] = [5]$

$[2] = \{2, 4\} = [4]$

Opazimo, da se določeni ekvivalenčni razredi ujemajo, če pa so različni, pa nimajo skupnih elementov. Po drugi strani pa je tudi vsak element množice X *v nekem ekvivalenčnem razredu.*

To velja tudi na splošno.

Izrek 1.7. *Naj bo* $\sim$ *poljubna ekvivalenčna relacija na dani neprazni množici* X. *Potem za poljubna elementa* $a, b \in X$ *velja:*

1. $a \sim b \iff [a] = [b]$ *Ekvivalenčna razreda elementov, ki sta v relaciji, se ujemata.*
2. *Če* a *ni v relaciji z* b, *potem je* $[a] \cap [b] = \phi$ *Ekvivalenčna razreda elementov, ki nista v relaciji, sta disjunktna.*
3. X *je disjunktna unija ekvivalenčnih razredov. Z drugimi besedami: vsak element množice* X *pripada natanko enemu ekvivalenčnemu razredu.*

Ta izrek nam zagotavlja, da lahko ekvivalenčno relacijo rekonstruiramo, če poznamo njene ekvivalenčne razrede.

Zgled 1.8. *Recimo, da je* $[1] = \{1, 3, 5\}$, $[2] = \{2, 6\}$ *in* $[4] = \{4\}$. *Torej je* $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *in ekvivalenčna relacija* $\sim$, *ki jo ti razredi določajo, se glasi:*

$$\begin{aligned}\sim\ = \{&(1,1), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (3,3), (3,5), (5,3), (5,5), \\ &(2,2), (2,6), (6,2), (6,6), (4,4)\}.\end{aligned}$$

Množico ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$ na množici X imenujemo **faktorska množica** in jo označimo $X/_\sim$. Za relacijo iz prejšnjega zgleda je

$$\begin{aligned} X/_\sim &= \{[1], [2], [4]\} \\ &= \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}\}. \end{aligned}$$