Matematika

Fakulteta za družbene vede

Vsebina

1. Pregled elementarnih funkcij
   - Linearna funkcija
   - Potence in polinomi
   - Racionalne funkcije
   - Korenske funkcije
   - Eksponentna funkcija
   - Logaritemska funkcija
   - Transformacije grafov

Linearna funkcija

Definicija

Linearna funkcija je funkcija oblike

$$y = kx + n.$$

- Linearna funkcija je definirana na vsej množici $\mathbb{R}$.
- Pri $k > 0$ je strogo naraščajoča, pri $k < 0$ je strogo padajoča, pri $k = 0$ pa je konstantna.
- Pri $k \neq 0$ ima natanko eno ničlo pri $x = -\frac{n}{k}$, pri $k = 0$ pa je bodisi konstantno enaka 0, bodisi nima nobene ničle.
- Graf linearne funkcije je premica.

Potence

Definicija

Funkcija oblike

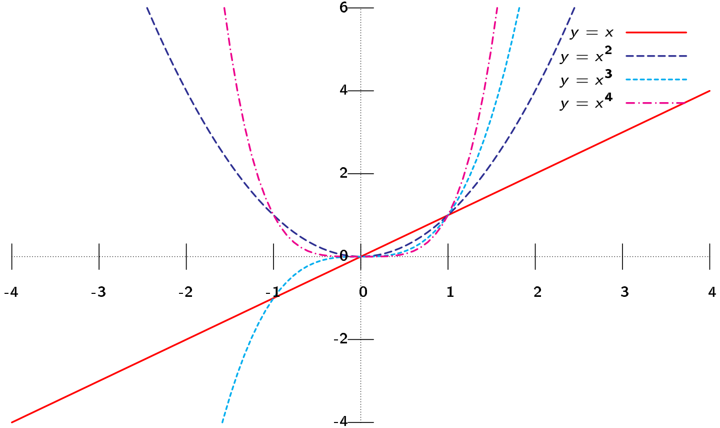
$$f(x) = x^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

se imenuje potenca n-te stopnje.

Za potenco $f(x) = x^n$ velja:

- $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$;
- ima edino ničlo v $x = 0$;
- nima nobenega pola;
- ko narašča x preko vseh meja narašča tudi x^n preko vseh meja: $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$;
- v limiti, ko gre $x \to -\infty$ pa velja
  - za potence s sodo stopnjo (n je sodo): $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$;
  - za potence z liho stopnjo pa velja: $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$;

Potence različnih stopenj



Graf funkcije $f(x) = x^n$ se imenuje parabola n-te stopnje

Polinomi

Definicija

Funkcija oblike

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

pri čemer je $a_n \neq 0$, ostali a_i pa so poljubna realna števila, se imenuje polinom n-te stopnje.

Števila $a_0, a_1, \ldots, a_n$ imenujemo koeficienti polinoma, pri čemer je a_n vodilni koeficient. Posamezni sumandi oblike $a_i x^i$ pa se imenujejo členi polinoma, pri čemer je $a_n x^n$ vodilni člen.

Velja:

- vsi polinomi so definirani na vsej množici $\mathbb{R}$;
- polinomi nimajo polov;
- polinom stopnje n ima lahko največ n ničel.

Ničle polinomov

Če ima polinom n-te stopnje n realnih ničel, ga lahko zapišemo v obliki

$$p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Lahko se zgodi, da je več faktorjev enakih. Če nastopi faktor $(x - x_k)$ m-krat, pravimo, da je x_k *m-kratna ničla* polinoma $p(x)$.

Primer

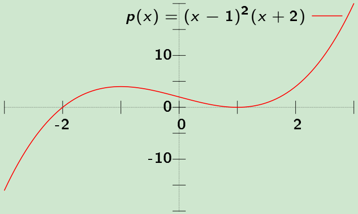
- Polinom $p(x) = x^3 + x^2 - 2x = (x - 1)(x + 2)x$ ima tri različne ničle: $1, -2$ in 0.
- Polinom $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2(x^2 + 1)$ ima le ničlo 2, ki je dvakratna.
- Polinom $p(x) = x^4 + 1$ nima realnih ničel.

Ničle polinoma na grafu

Iz stopnje ničle lahko sklepamo na obnašanje polinoma v okolici ničle:

- V ničli lihe stopnje (1, 3, 5, ...) se predznak polinoma spremeni.
- V ničli sode stopnje se predznak polinoma ne spremeni.

Primer



V enkratni ničli -2 se predznak spremeni, v dvakratni ničli 1 pa ne.

Obnašanje polinoma pri velikih x

Polinom n-te stopnje lahko zapišemo v obliki

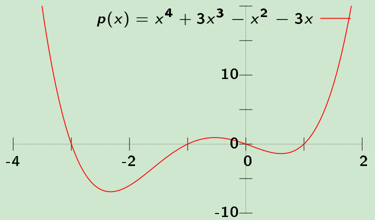
$$p(x) = a_n x^n \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \cdots + 1 \right),$$

od koder lahko sklepamo, da se polinom pri velikih vrednostih x obnaša približno tako, kot njegov vodilni člen, saj se izraz v oklepaju približuje vrednosti 1. To pomeni, da velja

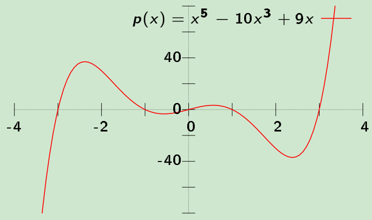
$$\lim_{x \to \pm\infty} |p(x)| = \infty.$$

Grafi polinomov 4. in 5. stopnje

Primer (Polinom 4. stopnje.)



Primer (Polinom 5. stopnje.)



Racionalne funkcije

Definicija

Racionalna funkcija je funkcija oblike

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma.

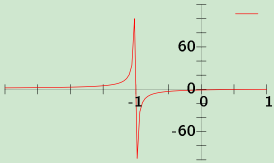
Velja:

- racionalna funkcija je definirana povsod razen v ničlah polinoma $q(x)$;
- ničle racionalne funkcije so tiste ničle polinoma $p(x)$, ki niso hkrati tudi ničle $q(x)$;
- v ničlah polinoma $q(x)$, ki niso tudi ničle $p(x)$ ima racionalna funkcija pol;
- če je x_0 hkrati ničla $p(x)$ in $q(x)$, pravimo, da ima v točki x_0 nedoločenost. Polinom v točkah nedoločenosti ni definiran, vendar pa lahko števec in imenovalec okrajšamo tako, da nimata skupnih ničel, kar pomeni, da odpravimo nedoločenost. Razen v točkah nedoločenosti, se okrajšani polinom obnaša enako kot neokrajšani.

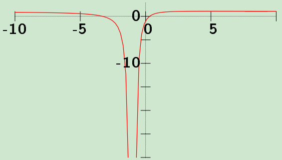
Obnašanje racionalne funkcije v ničlah in polih

- V ničlah se racionalne funkcije obnašajo podobno kot polinomi, v odvisnosti od stopnje ničle.
- Če je x_0 m-kratna ničla imenovalca racionalne funkcije, pravimo, da je v x_0 pol m-te stopnje.
- Racionalna funkcija v polu spremeni predznak natanko tedaj, ko je ta lihe stopnje.

Primer (Pol 1. stopnje)



Primer (Pol 2. stopnje)



Obnašanje pri velikih x

Zapišimo števec in imenovalec racionalne funkcije $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ v obliki

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \\ q(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \end{aligned}$$

Za velike x se polinom $p(x)$ obnaša približno tako kot njegov vodilni člen $a_m x^m$ polinom $q(x)$ pa kot $b_n x^n$.
Racionalna funkcija se zato obnaša približno tako kot njun kvocient $\frac{a_m x^m}{b_n x^n}$.
V primeru, ko je $m < n$, velja

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m}{b_n x^{n-m}} = 0.$$

V primeru, ko velja $m \geq n$, pa lahko števec delimo z imenovalcem in dobimo:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)},$$

pri čemer je stopnja polinoma $s(x)$ manjša od stopnje $q(x)$, zato se $f(x)$ za velike $|x|$ obnaša kot polinom $r(x)$.

V posebnem primeru, ko je $m = n$, je $r(x) = \frac{a_m}{b_n}$, če pa je $m = n + 1$ je $r(x)$ neka premica.

Primer

Naj bo

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1} = x + 1 - \frac{1}{x - 1}.$$

V tem primeru je $m = 2 = n + 1$.

Asimptote

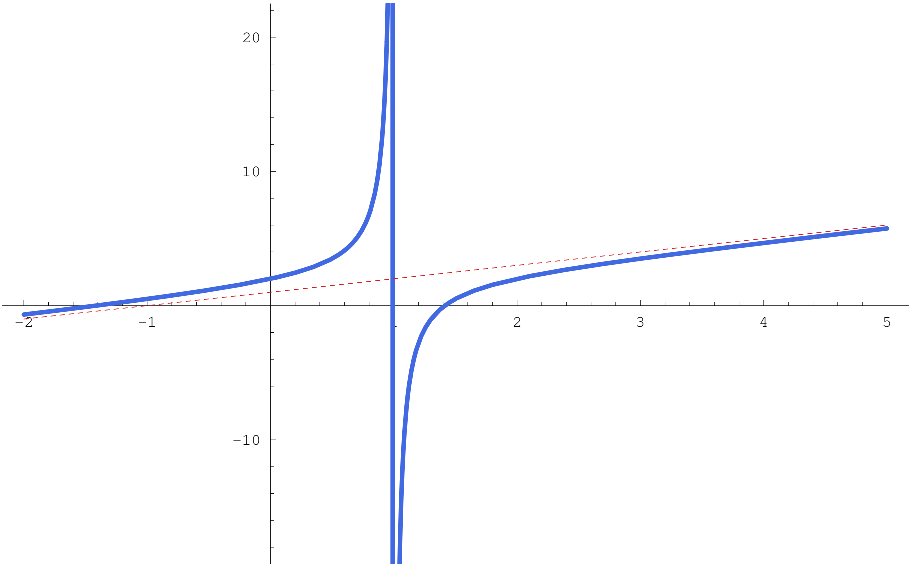
Definicija

Asimptota neke krivulje je taka premica, za katero velja, da se ji točke na krivulji, dovolj oddaljene od izhodišča, poljubno približajo.

Racionalne funkcije imajo več vrst asimptot:

- vertikalna asimptota je premica oblike $x = x_0$, kjer je x_0 **pol** funkcije $f(x)$;
- v primeru, ko je $m < n$ ali $m = n$ je premica $y = 0$ oziroma $y = \frac{a_m}{b_n}$ horizontalna asimptota;
- v primeru, ko velja $m = n + 1$, ima krivulja poševno asimptoto, katere enačbo dobimo z deljenjem števca z imenovalcem.

Primer - graf funkcije $f(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$



Korenske funkcije

Definicija

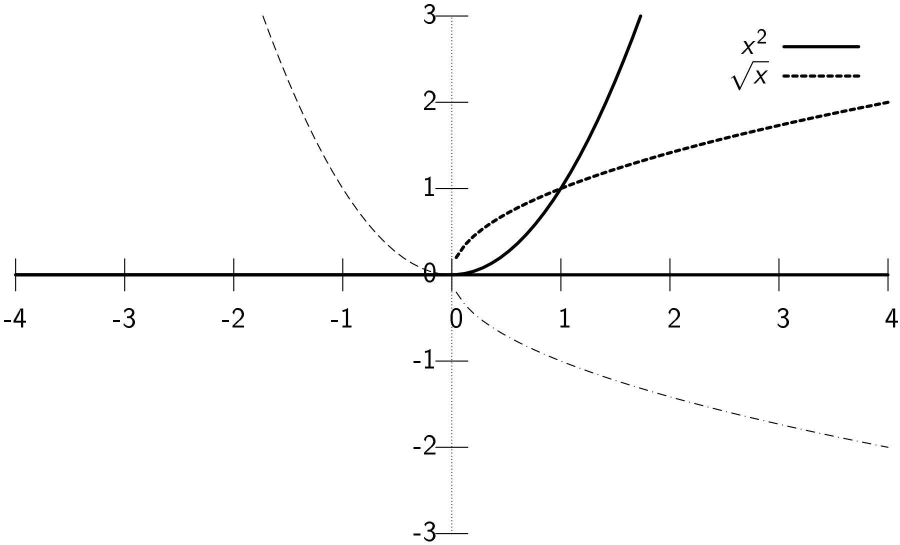
Korenske funkcije so podane z enačbami $y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, \ldots$.

Te funkcije lahko gledamo kot inverzne funkcije potenc $y = x^2, y = x^3, \ldots$.
Toda vemo, da sode potence niso injektivne, zato lahko definiramo inverz le na neki podmnožici definicijskega območja.

Dogovorimo se torej, da pri sodih korenskih funkcijah jemljemo le pozitivni koren.

Primer

Enačba $x^2 = 4$ ima rešitvi $x = +2$ in $x = -2$, vendar definiramo $\sqrt{4} = +2$.


3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x^2
$\sqrt{x}$

Eksponentna funkcija

Definicija

Eksponentna funkcija je podana eksplicitno z enačbo

$$y = a^x,$$

pri čemer je osnova $a > 0$ konstanta.

Velja:

- funkcija je definirana za vsak $x \in \mathbb{R}$;
- funkcija je povsod pozitivna;
- nima nobene ničle ali pola;
- $a^0 = 1, a^1 = a$.

Obnašanje pri velikih x

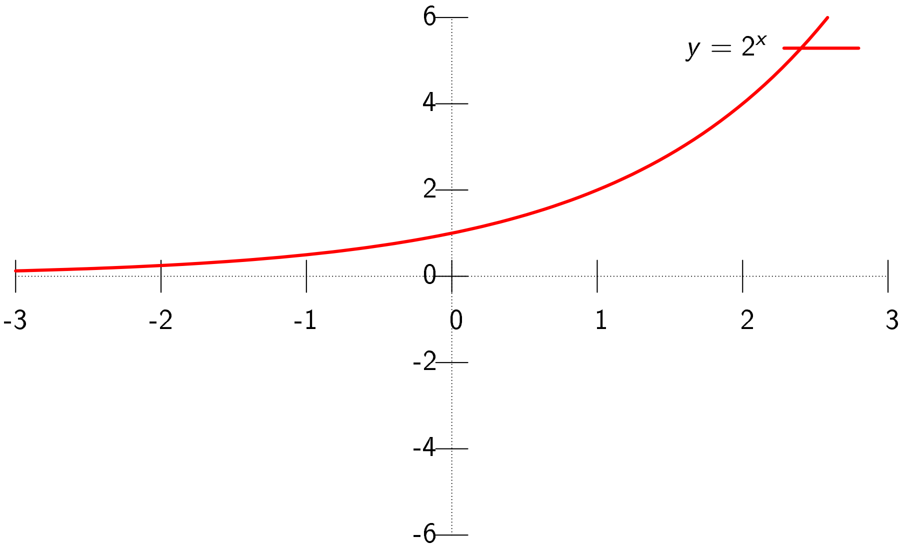
Če je $a = 1$, je eksponentna funkcija konstanta $1^x = 1$.

Če je $a > 1$, je funkcija povsod naraščajoča in velja:

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Primer - graf funkcije $y = 2^x$



Oglejmo si še funkcijo $f(x) = a^{-x}$, v primeru, ko je $a > 1$. Grafa funkcij a^x in a^{-x} sta simetrična glede na koordinatno os y.

Toda funkcijo a^{-x} lahko preoblikujemo v obliko $\left(\frac{1}{a}\right)^x$, ki je eksponentna funkcija z osnovo $\frac{1}{a}$, ki je sedaj manjša od 1.

Še več, vsako eksponentno funkcijo oblike a^x, za $a < 1$ lahko predstavimo v obliki $a^x = b^{-x}$, pri čemer je $b = a^{-1} > 1$.

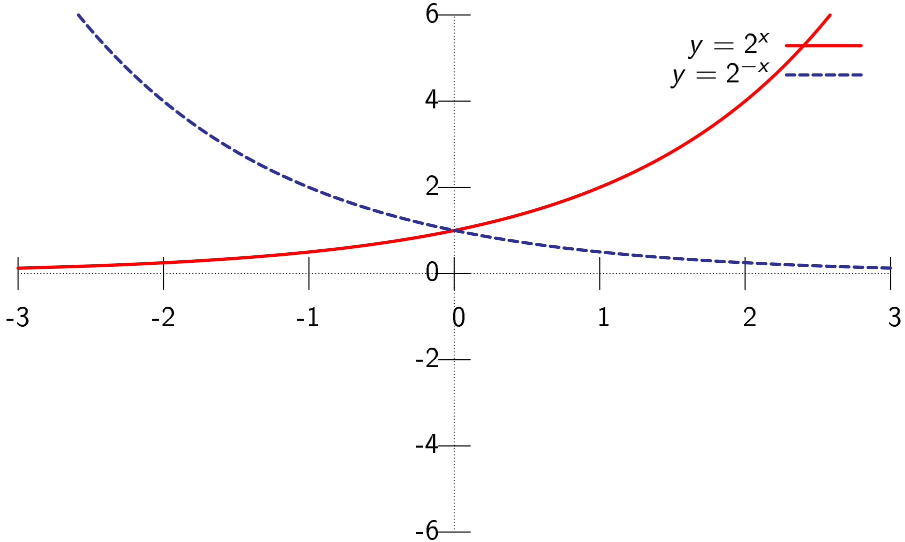
Primer

Funkcija 2^{-x} je enaka funkciji $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Iz te simetrije lahko za $a < 1$ sklepamo:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \qquad \text{in} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$

Primer - grafa funkcij 2^x in $2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Logaritemska funkcija

Eksponentna funkcija $y = a^x$, kjer je $a > 0$, $a \neq 1$ je bijektivna preslikava iz $\mathbb{R}$ na $(0, \infty)$ in zato obrnljiva preslikava. Njen inverz je logaritemska funkcija z osnovo a, ki je definirana na množici $(0, \infty)$ in jo slika v množico $\mathbb{R}$.

Definicija

Logaritem števila y z osnovo a je tako realno število x, da velja $y = a^x$. Pišemo

$$x = \log_a y$$

Torej:

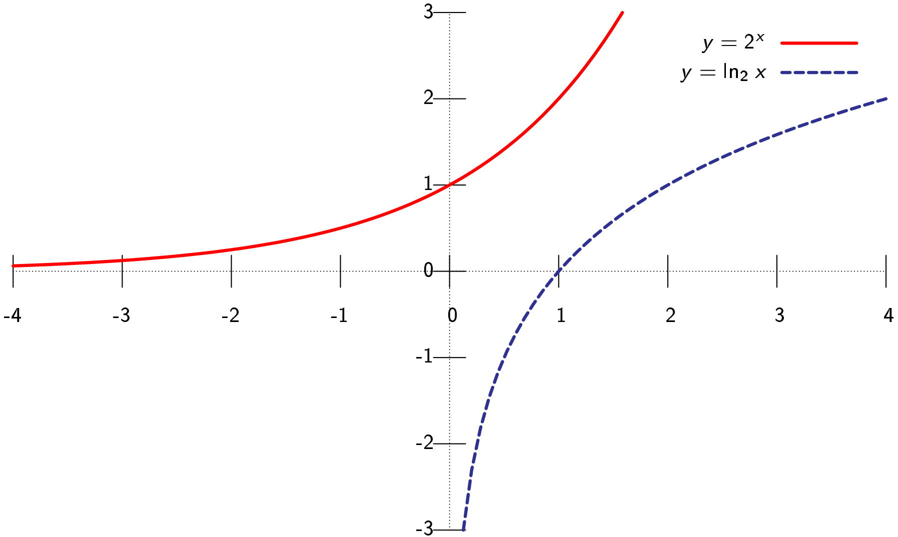
$$x = \log_a y \qquad \Leftrightarrow \qquad a^x = y.$$

Argumentu x pravimo logaritmand.

Lastnosti logaritemske funkcije

- Logaritemska funkcija je definirana samo za $x > 0$.
- Pri $a > 1$ je logaritemska funkcija strogo naraščajoča, pri $a < 1$ pa strogo padajoča.
- Za vsak a velja $\log_a 1 = 0$ in $\log_a a = 1$.
- V točki 0 ima logaritemska funkcija pol.
- Obnašanje na robovih definicijskega območja:
  - če je $a > 1$ velja $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ in $\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$;
  - če je $a < 1$ velja $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$ in $\lim_{x\to 0} \log_a x = \infty$

Primer - Eksponentna in logaritemska funkcija



Transformacije grafov funkcij

Denimo, da je poznan graf funkcije $f(x)$. Tedaj se naslednje transformacije na grafu izražajo kot:

- $y = f(x) + k$ se izraža kot vertikalna translacija grafa za $|k|$ enot navzgor, če je k pozitiven, in navzdol, če je k negativen;
- $y = f(x + h)$ se izraža kot horizontalna translacija za $|h|$ enot v levo, če je h pozitiven, in v desno, če je h negativen;
- $y = -f(x)$ se izraža kot zrcaljenje čez os x (vodoravna);
- $y = f(-x)$ se izraža kot zrcaljenje čez os y (navpična);
- $y = Af(x)$ se izraža kot raztezek (skrčitev) za faktor A.