REALNE FUNKCIJE

Obravnavamo funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, kjer je definicijsko območje D neka podmnožica $\mathbb{R}$. Včasih površno zapišemo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, v mislim pa imamo funkcijo, katere definicijsko območje je v resnici prava podmnožica $\mathbb{R}$. Takrat govorimo o (naravnem) definicijskem območju D_f, ki je množica vseh tistih realnih števil x, kjer lahko z danim predpisom funkcijsko vrednost smiselno izračunamo. Graf funkcije f je $\left\{ (x, y) ;\ x \in D_f \text{ in } y = f(x) \right\}$.

Osnovne lastnosti,
ki nas bodo zanimale pri proučevanju funkcij:

- **definicjsko območje** D_f

- **ničle**: Število $a \in D_f$ je ničla funkcije f, če je $f(a) = 0$. Točka $x = a$ določa presečišče grafa funkcije z osjo x.

- **začetna vrednost** $f(0)$ določa presek z osjo y.

- **parnost:** Naj bo funkcija f definirana na nekem simetričnem definicijskem območju ($x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$).
Funkcija je **liha**, če velja $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D_f$
Funkcija je **soda,** če je $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in D_f$.

- **monotonost:** Funkcija je na nekem intervalu $I \subseteq D_f$

naraščajoča, če velja	:	$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)\,,\quad \forall a, b \in I$
padajoča, če velja	:	$a < b \Rightarrow f(a) > f(b) \quad \forall a, b \in I$
nepadajoča, če velja	:	$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \quad \forall a, b \in I$
nenaraščajoča,če velja	:	$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \quad \forall a, b \in I.$

Interval I, na katerem je funkcija monotona, se imenuje **interval monotonosti.**

- **omejenost:** Funkcija je **navzgor omejena**, če obstaja tako realno število M, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in D_f$; ine je **navzdol omejena**, če obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in D_f$. Rečemo, da je funkcija **omejena**, če je navzgor in navzdol omejena. V tem primeru je njena zaloga vrednosti vsebovana v nekem omejenem intervalu.

- **periodičnost.** Funkcija je **periodična,** če obstaja tako število T, da je $f(x + T) = f(x)$ za vsak $x \in D_f$. Tudi tukaj mora biti D_f tako, da je $x \in D_f \iff x + T \in D_f$.

Računske operacije s funkcijami:

Funkcije lahko seštevamo, odštevamo, množimo, delimo, komponiramo in na ta način dobivamo nove funkcije.

$f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ naj bosta funkciji.

1. **vsota:**$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2. **produkt:** $f.g : (f.g)(x) = f(x)\, g(x)$
3. **kvocient:** $\frac{f}{g}$: $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)};\ \ g(x) \neq 0,$
4. **kompozitum:** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Vsota in produkt sta definirani na $D_1 \cap D_2$, medtem ko je naravno definicijsko območje kvocienta enako $(D_1 \cap D_2) \setminus \{a;\ g(a) = 0\}$. Kompozitum je definiran največ na množici $\{x;\ x \in D_1$ in $f(x) \in D_2\}$.

Pregled elementarnih funkcij

1. Konstantna funkcija $f(x) = b$. Graf je premica, ki je vzporedna osi x in pri $y = b$ seka os y.
2. Linearna funkcija
   $f(x) = kx + n,\ k \neq 0$. Graf je premica.
   $k > 0 \Rightarrow f$ je naraščajoča na $\mathbb{R}$
   $k < 0 \Rightarrow f$ je padajoča na $\mathbb{R}$.
3. Kvadratna funkcija
   $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a},\ \ a \neq 0,$
   $T\left(\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ je teme. Graf kvadratne funkcije je kvadratna **parabola.**
4. Potenčna funkcija
   $f(x) = x^n$
   Ločimo sode in lihe n.
5. Polinomi: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n,$ $a_n \neq 0$. Naravnemu številu n pravimo **stopnja** polinoma.
   Osnovni izrek algebre pravi: polinom stopnje n s kompleksnimi koeficienti ima natanko n ničel (če jih štejemo z večkratnostjo).
   Polinom z realnimi koeficienti je lahko tudi brez realnih ničel: npr.: $p(x) = x^2 + 1$; velja pa, da ima realni polinom **lihe stopnje** vsaj eno realno ničlo.
6. Racionalne funkcije $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p in q sta polinoma.
7. Korenske funkcije $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Vse do sedaj omenjene funkcije sestavljajo družino **algebraičnih** funkcij; to so take, ki jih lahko izrazimo kot korene polinomskih enačb s polinomskimi koeficienti $a_0(x), \ldots, a_n(x)$:

$$a_n(x)\, y^n + a_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_1(x)\, y + a_0(x) = 0.$$

Na primer: enačbo $q(x)\, y - p(x) = 0$ reši racionalna funkcija $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, enačbo $y^n - x = 0$ korenska funkcija $y = \sqrt[n]{x}$.

Funkcije, ki niso algebraične, imenujemo **transcendentne**.

1. Trigonometrične funkcije: $\sin$, $\cos$, tg, ctg (uporablja se tudi: $\tan$, $\cot$)
2. Inverzne trigonometrične ali ciklometrične funkcije: $\arcsin$, $\arccos$, $\mathrm{arctg}\,(\arctan)$, $\mathrm{arctg}\,(\mathrm{arccot})$
3. Eksponentna funkcija $f(x) = a^x$, $a > 0$ in $a \neq 1$, $f(x) = e^x$
4. Logaritemska funkcija $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ in $a \neq 1$, $\ln(x) = \log_e x$
5. Hiperbolične funkcije: $\mathrm{ch}\,(\cosh)$, $\mathrm{sh}\,(\sinh)$, $\mathrm{th}\,(\tanh)$, $\mathrm{cth}\,(\coth)$