Matematika

Fakulteta za družbene vede

Vsebina

Funkcije ene realne spremenljivke

Definicija

Realna funkcija realne spremenljivke je predpis f, ki realnemu številu x priredi natanko določeno realno število y.

Tedaj je spremenljivka y funkcija spremenljivke x in pišemo

$$y = f(x)$$

Spremenljivko x imenujemo neodvisna spremenljivka ali argument, spremenljivka y pa je odvisna spremenljivka.

Primer

Naj bo dana funkcija f s predpisom $f(x) = x(x+1)$.
Tedaj velja:

x	y
3	$3(3+1) = 12$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 3+\sqrt{3}$

Definicijsko območje in zaloga vrednosti

Množica vseh vrednosti, pri katerih je definirana funkcija f, se imenuje definicijsko območje ali domena funkcije in jo označimo $\mathcal{D}f$.

Množica vseh števil $f(x)$ pa se imenuje zaloga vrednosti funkcije in jo označimo z $\mathcal{Z}f$.

Funkcija je torej upodobitev množice $\mathcal{D}f$ v množico $\mathcal{Z}f$:

$$f : \mathcal{D}f \to \mathcal{Z}f.$$

Primer (1)

Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ je definirana za vsa realna števila razen 1. Njeno definicijsko območje je torej $\mathbb{R} - \{1\}$.

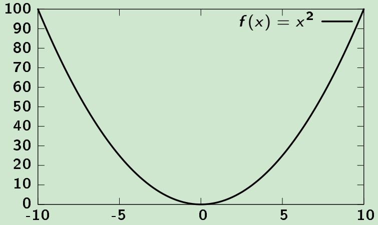
Primer (2)

Funkcija $f(x) = \sqrt{2-x}$ je definirana za vsa realna števila, za katera velja $2 - x \geq 0$, torej $x \leq 2$. Njeno definicijsko območje je torej $(-\infty, 2]$.

Graf funkcije

Funkciji f lahko priredimo množico urejenih parov $(x, f(x))$, pri čemer množica prvih koordinat preteče množico $\mathcal{D}f$. To množico imenujemo graf funkcije in jo lahko prikažemo v koordinatnem sistemu.

Primer



Slika: Graf funkcije $f(x) = x^2$.

Injektivnost, surjektivnost in bijektivnost

Definicija

Funkcija f je injektivna natanko tedaj, ko je vsak element iz zaloge vrednosti slika natanko enega elementa iz domene:

$$f \text{ je injektivna} \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

oziroma

$$f \text{ je injektivna} \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definicija

Funkcija f je surjektivna natanko tedaj, ko je njena zaloga vrednosti enaka množici vseh realnih števil: $\mathcal{Z}f = \mathbb{R}$.

Definicija

Funkcija, ki je hkrati injektivna in surjektivna, je bijektivna.

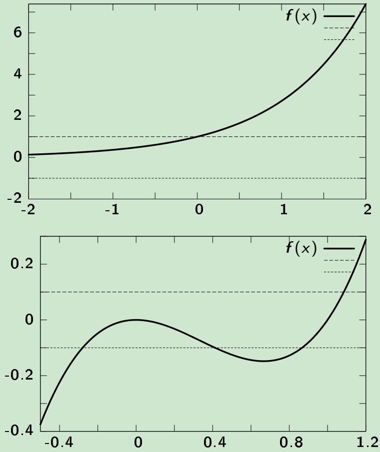
Injektivnost in surjektivnost na grafu funkcije

Za graf injektivne funkcije velja, da vsaka vodoravna črta seka graf funkcije največ enkrat.

Za graf surjektivne funkcije velja, da vsaka vodoravna črta seka graf funkcije najmanj enkrat.

Za graf bijektivne funkcije velja, da vsaka vodoravna črta seka graf funkcije natanko enkrat.

Primer



Slika: Graf injektivne in graf surjektivne funkcije.

Ničle in poli funkcij

Definicija

Rešitve enačbe $f(x) = 0$ imenujemo ničle funkcije. Ničla je torej taka vrednost neodvisne spremenljivke, da ime funkcija pri njej vrednost 0.

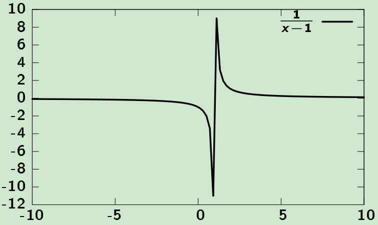
Definicija

Točka x_0 se imenuje pol funkcije f, če funkcija v vsaki okolici te točke po absolutni vrednosti preseže vse meje. Točka x_0 v tem primeru ni v definicijskem območju funkcije f.

Primer

Funkcija $f(x) = x(x+1)$ ima dve ničli, $x = 0$ in $x = -1$.

Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ima v točki $x_0 = 1$ pol.



Monotonost funkcij

Definicija

Funkcija f je na intervalu I naraščajoča, če za poljubna $x_1, x_2 \in I$ iz $x_1 \leq x_2$ sledi $f(x_1) \leq f(x_2)$. Funkcija f je na tem intervalu strogo naraščajoča, če za poljubna $x_1, x_2 \in I$ iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) < f(x_2)$.

Definicija

Funkcija f je na intervalu I padajoča, če za poljubna $x_1, x_2 \in I$ iz $x_1 \leq x_2$ sledi $f(x_1) \leq f(x_2)$. Funkcija f je na tem intervalu strogo naraščajoča, če za poljubna $x_1, x_2 \in I$ iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) < f(x_2)$.

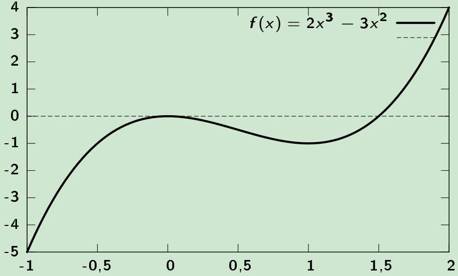
Definicija

Naraščajočim in padajočim funkcijam pravimo monotone, strogo naraščajočim in strogo padajočim pa strogo monotone funkcije.

Monotonost na grafu

Monotonost funkcije najlažje razberemo iz grafa.

Primer

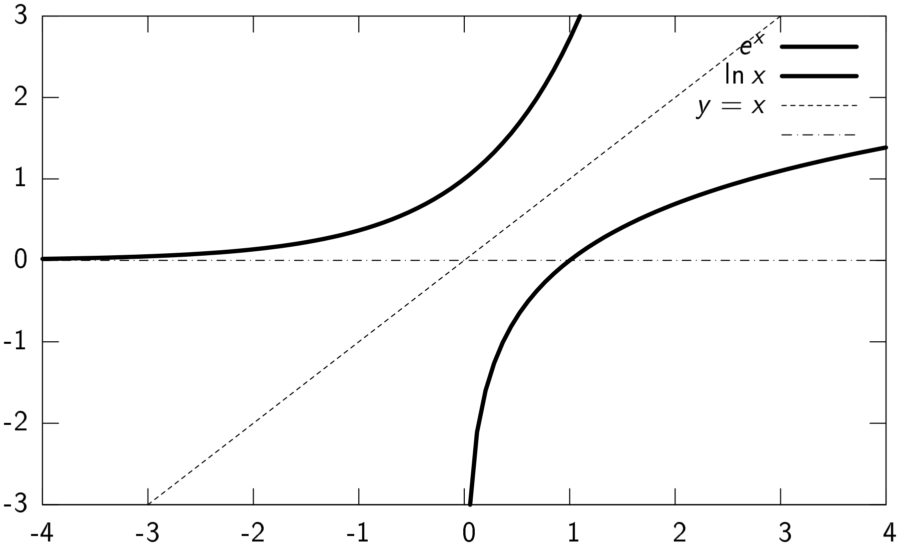


Iz grafa razberemo:

- funkcija je na intervalu $[-1, 0]$ naraščajoča;
- funkcija je na intervalu $[0, 1]$ padajoča;
- funkcija je na intervalu $[1, 2]$ naraščajoča;
- funkcija ima ničle v točkah 0 in 1,5.

Inverzna funkcija

Če je funkcija $f\colon \mathcal{D}f \to \mathcal{Z}f$ injektivna, vsakemu elementu iz zaloge vrednosti pripada natanko en element iz domene. Zato obstaja njej obratna ali inverzna funkcija $f^{-1}\colon \mathcal{Z}f \to \mathcal{D}f$.
Velja $x = f^{-1}(y)$.
Iz grafa funkcije f lahko dobimo graf inverzne funkcije z zrcaljenjem preko premice $y = x$.


e^x
$\ln x$
$y = x$
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4