

MATEMATIČNI UVOD INTEGRAL

1. Nedoločeni integral

Pri integralnem računu iščemo funkcijo $F(x)$, katere odvod $\frac{dF(x)}{dx}$ je enak znani funkciji $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow \frac{F(x)}{dx} = f(x)$$

primer 1: Naj bo podana funkcija $f(x) = 2x^2 - 3x$. Poišči funkcijo $F(x) = \int f(x)dx$.

$$F(x) = \int (2x^2 - 3x)dx,$$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + konst.$$

V kolikor dobljeno funkcijo $F(x)$ odvajamo, dobimo:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = 2x^2 - 3x.$$

primer 2: Izračunaj $F(t) = \int A_0 \sin(\omega t)dt$, pri čemer sta A_0 in ω konstanti.

$$F(t) = -\frac{A_0}{\omega} \cos(\omega t) + konst.$$

V kolikor dobljeno funkcijo odvajamo po t , dobimo:

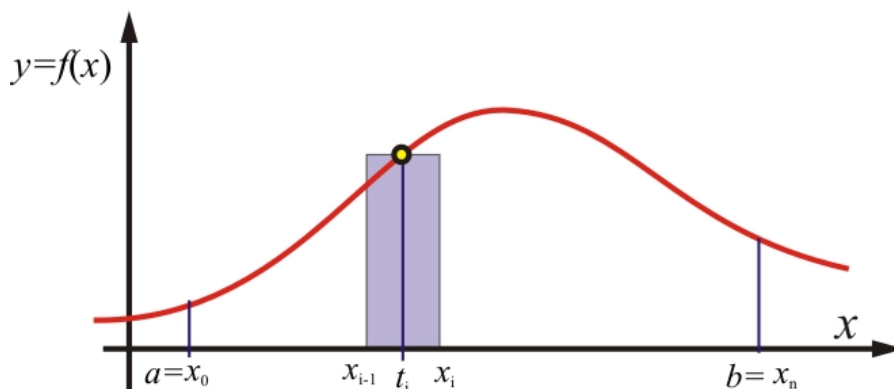
$$\frac{F(t)}{dt} = A_0 \sin(\omega t). \text{ Dobili smo torej prvotno funkcijo, ki smo jno integrirali.}$$

2. Tabela nedoločenih integralov elementarnih funkcij

Nedoločeni integrali elementarnih funkcij	primeri
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int 3t^2 dt = \frac{3t^3}{3} = t^3$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{1}{t} dt = \ln t$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \sin(\omega t) dt = \frac{-\cos(\omega t)}{\omega}$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \cos(\omega t) dt = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^{-\beta t} dt = \frac{e^{-\beta t}}{-\beta}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$	$\int \frac{1}{\cos^2(\omega t)} dt = \frac{\operatorname{tg}(\omega t)}{\omega}$

3. Določeni integral, geometrijski pomen integrala

V koordinatnem sistemu vzemimo lik, ki je omejen z abscisno osjo, premicama $x=a$ in $x=b$ in grafom zvezne funkcije $y=f(x)$.



- Razdelimo interval $[a,b]$ z $n+1$ točkami na n podintervalov.
- Na vsakem podintervalu izberemo po eno točko t_i .
- produkt $f(t_i) \cdot \Delta x_i$ je ploščina pravokotnika označenega na sliki.
- V kolikor seštejemo vse pravokotnike $\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$, dobimo ploščino prej omenjenega lika.

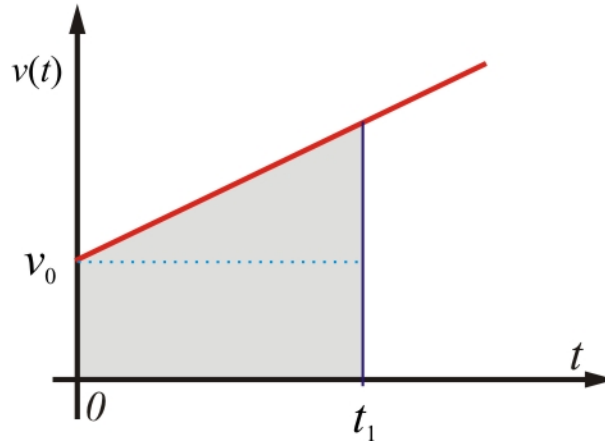
Vsota ploščin vseh pravokotnikov $\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$ se tem bolj približa ploščini krivočrtnega lika, čim ožji so vsi pasovi, torej čim manjše so ploščine podintervalov. Natančna ploščina lika je torej vrednost limite: $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$, ki jo imenujemo določeni integral.

Določeni integral na intervalu $[a, b]$ zvezdne funkcije $f(x)$ je število, ki je enako:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

Določen integral $\int_a^b f(x) dx$ pozitivne zvezdne funkcije $f(x)$ je število, ki podaja ploščino lika med krivuljo, abscisno osjo in pravokotnicama na os- x , ki gresta skozi začetno in končno točko danega intervala $[a, b]$.

- primer 1:** Hitrost avtomobila se spreminja kot:
 $v(t) = v_0 + at$, pri čemer sta v_0 in a konstanti.
Kolikšno pot s opravi avtomobil na časovnem intervalu $[0, t_1]$?



Pot, ki jo opravi avtomobil na časovnem intervalu $[0, t_1]$ je:

$$s = \int_0^{t_1} v(t) dt .$$

$$s = \int_0^{t_1} (v_0 + at) dt \quad \Rightarrow \quad s = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} .$$

Vrednost s je enaka ploščini pod krivuljo $v(t) = v_0 + at$ na intervalu $[0, t_1]$.