Integral

rešujemo nalogo:

Dana je funkcija f. Najdimo funkcijo F, katere odvod je enak f.

Če je $F'(x)=f(x)$ pravimo, da je $F(x)$ **primitivna funkcija** za funkcijo $f(x)$.

Primeri:

$$f(x)=\cos x \longrightarrow F(x)=\sin x$$

$$f(x)=\sin x \longrightarrow F(x)=-\cos x$$

$$f(x)=e^x \longrightarrow F(x)=e^x$$

$$f(x)=3 \longrightarrow F(x)=3x$$

$$f(x)=x^2 \longrightarrow F(x)=\frac{x^3}{3}$$

Za dano funkcijo obstaja več primitivnih funkcij:

$$\left.\begin{array}{l}(\sin x)' = \cos x \\ (3+\sin x)' = 3' + (\sin x)' = 0 + \cos x = \cos x\end{array}\right\}$$

primitivni funkciji za $\cos x$ **sta tako** $\sin x$, **kot** $3+\sin x$.

Če poznamo eno primitivno funkcijo za f, **dobimo vse druge tako, da tej prištejmo vse možne konstante.**

Množico vseh primitivnih funkcij za $f(x)$ **označimo z** $F(x)+c$, **kjer je** $F(x)$ **neka primitivna funkcija za** $f(x)$, c **pa je poljubno realno število.**

Postopek določanja primitivne funkcije imenujemo integriranje. Pišemo:

$$F(x) = \int \underbrace{f(x)}_{\text{integrand}} \underbrace{dx}_{}$$

pove po kateri spremenljivki integriramo in nastopa pri formulah za računanje integralov

integrand

integral

Pri računanju integralov uporabljamo pravila za integriranje in integrale osnovnih funkcij.

Integrali osnovnih funkcij

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \quad (r \neq -1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int e^x \, dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x$$

Pravila integriranja

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

vsota

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

produkt s konstanto

Primeri

$$\int \left(x^3 + x^2 \right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

$$\int \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 dt = \int t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{t^3}{3} - 2t - \frac{1}{t}$$

Če je $\int f(x)\,dx = F(x)$, je

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x))$$

uvedba nove spremenljivke

pravilo: funkcija $u(x)$ $\longrightarrow$ $du = u'(x)\,dx$

Novo spremenljivko u vpeljemo tako, da povsod, kjer v integralu nastopa spremenljivka x, jo zamenjamo z ustreznim izrazom v spremenljivki u.

Primer:

$$\int (2x+1)^4\,dx = \int u^4 \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^5}{5} = \frac{(2x+1)^5}{10}$$

$$u = 2x+1$$

$$du = 2\,dx$$

$$dx = \frac{1}{2} du$$

$$\int \sin(4x-3)\,dx = \int \sin u \,\frac{1}{4}\,du = -\frac{1}{4}\cos u = -\frac{1}{4}\cos(4x-3)$$

$$u = 4x-3 \qquad du = 4\,dx$$

$$\int x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{u}\,du = -\frac{1}{2}e^{u} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$u = -x^2 \qquad du = -2x\,dx$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln u = -\ln(\cos x)$$

$$u = \cos x \qquad du = -\sin x\,dx$$

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

integracija 'po delih'

(Za integriranje produktov določene oblike.)

krajše: $$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Primeri:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

$u = x$ $\quad$ $du = dx$

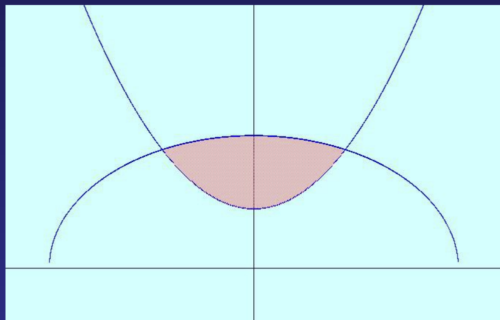
$dv = e^x\,dx$ $\quad$ $v = e^x$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x$$

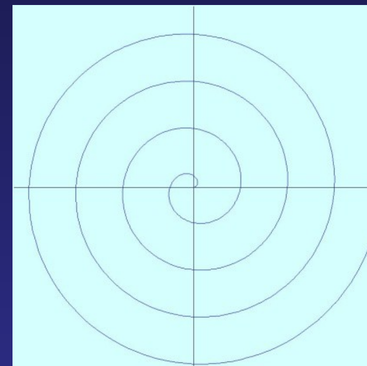
$u = \ln x$ $\quad$ $du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx$ $\quad$ $v = x$

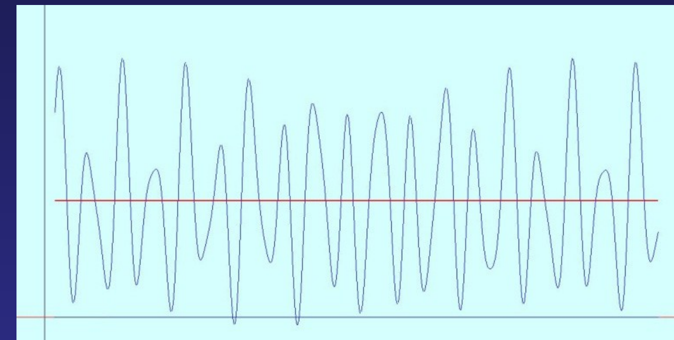
Uporaba integrala



Ploščine likov



Dolžine krivulj



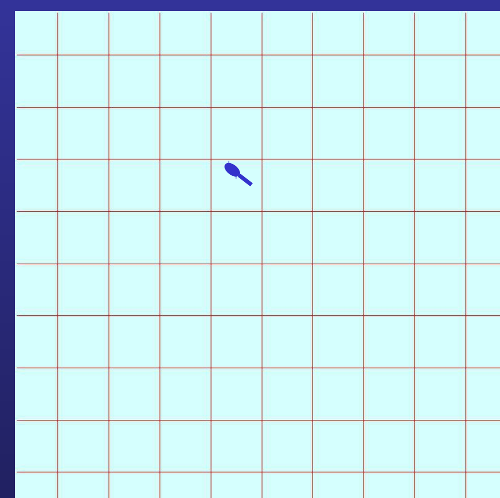
Povprečja

Hitrost ohlajanja nekega telesa je sorazmerna razliki med temperaturo telesa in temperaturo okolice:

$$T' = k(T - T_0)$$

Kako hitro se bo vrela juha v prostoru, kjer je 20°C ohladila do užitnih 50°C?

Diferencialne enačbe



Kolikšna je verjetnost, da bo žlica, ki pade na tla obležala na eni sami ploščici?

Verjetnost

Integracijske tehnike

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}\,x$$

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

$$u = g(x)$$

Racionalne funkcije

osnovna formula: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$

Primer: $\int \frac{x^3-3x+1}{x^2-1}\,dx = ?$

1.korak: če je stopnja števca večja od stopnje imenovalca, zdelimo

$$(x^3-3x+1):(x^2-1)=x,\ \text{ost.}\ -(2x-1) \Longrightarrow \frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=x-\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}$$

2.korak: preostali ulomek razcepimo na delne ulomke

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \Longrightarrow 2x-1=A(x+1)+B(x-1)=(A+B)x+(A-B)$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=2\\ A-B&=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$$

3.korak: sumande v razcepu integriramo po formuli

$$\int \frac{x^3-3x+1}{x^2-1}\,dx=\int\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx=\boxed{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{3}{2}\ln(x+1)}$$

$$\int \frac{x+1}{(2x-1)^2}\,dx = ?$$

Če ima imenovalec dvojno ničlo vpeljemo novo spremenljivko:

$$u = 2x-1,\quad du = 2\,dx \qquad \Rightarrow$$

$$\int \frac{x+1}{(2x-1)^2}\,dx = \int \frac{\frac{u+1}{2}+1}{u^2}\frac{du}{2} = \int \frac{u+3}{4u^2}du = \frac{1}{4}\ln u - \frac{3}{4u} = \boxed{\frac{1}{4}\ln(2x-1) - \frac{3}{8x-4}}$$

$$\int \frac{3x+1}{2+x^2}\,dx = ?$$

Če imenovalec nima realnih ničel, prevedemo na logaritem in arkus tangens:

$$\int \frac{3x+1}{2+x^2}\,dx = \int \frac{3x}{2+x^2}dx + \int \frac{1}{2+x^2}dx$$

$$\longrightarrow \int \frac{3x}{2+x^2}dx = \qquad = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{3}{2}du = \frac{3}{2}\ln u = \boxed{\frac{3}{2}\ln(2+x^2)}$$

$$u = 2+x^2,\quad du = 2x\,dx$$

$$\longrightarrow \int \frac{1}{2+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2/2}dx = \qquad = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} u = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$u^2 = x^2/2,\quad u = x/\sqrt{2},\quad dx = \sqrt{2}\cdot du$$

Kotne funkcije

$$\int \sin x \cos^4 x \, dx = \qquad = -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} = -\frac{\cos^5 x}{5}$$

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

formule za kvadrate: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \mathrm{tg}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

Računanje ploščin

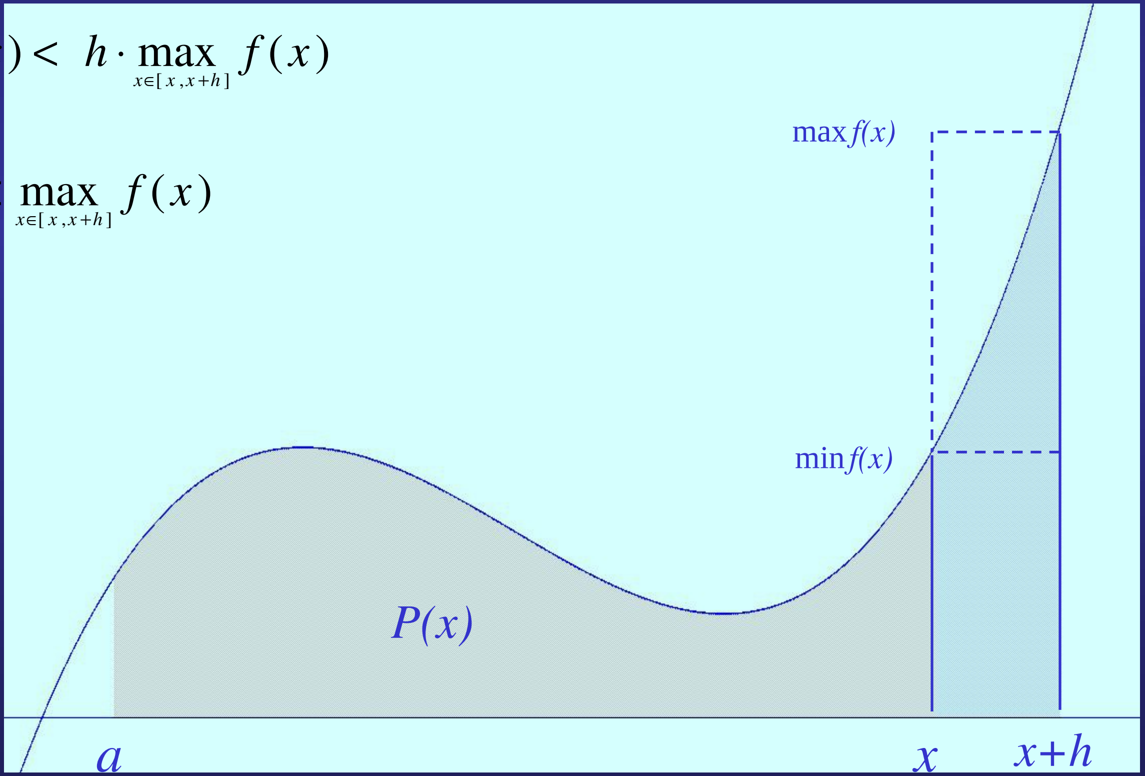
Želimo določiti ploščino pod grafom funkcije $y=f(x)$

$P(x)$ **je ploščina pod grafom na intervalu od** a **do** x.

$$h\cdot\min_{x\in[x,x+h]} f(x) < P(x+h)-P(x) < h\cdot\max_{x\in[x,x+h]} f(x)$$

$$\min_{x\in[x,x+h]} f(x) < \frac{P(x+h)-P(x)}{h} < \max_{x\in[x,x+h]} f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(x+h)-P(x)}{h} = f(x)$$

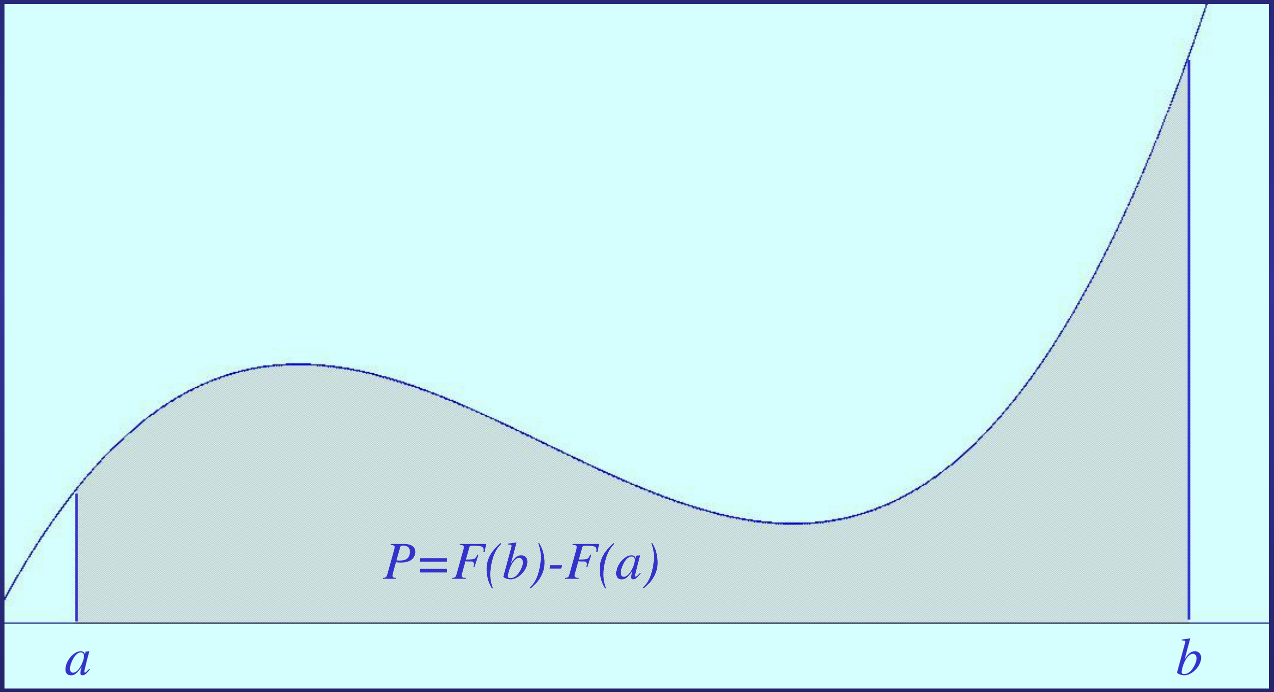


$P(x)$ **je primitivna funkcija za** $f(x)$ **!**

Če je $F(x)$ **neka primitivna funkcija za** $f(x)$**, potem je** $F(x)-P(x)=c$.

Kako bi izračunali c?

Vstavimo $x=a$: $F(a)-P(a)=c \;\Rightarrow\; c=F(a) \;\Rightarrow\; P(x)=F(x)-F(a)$.



Če je $F(x)$ **poljubna primitivna funkcija za** $f(x)$, **je ploščina pod grafom** $y=f(x)$ **na intervalu** $[a,b]$ **enaka** $P=F(b)-F(a)$.

Ker je $F(x) = \int f(x)\, dx$

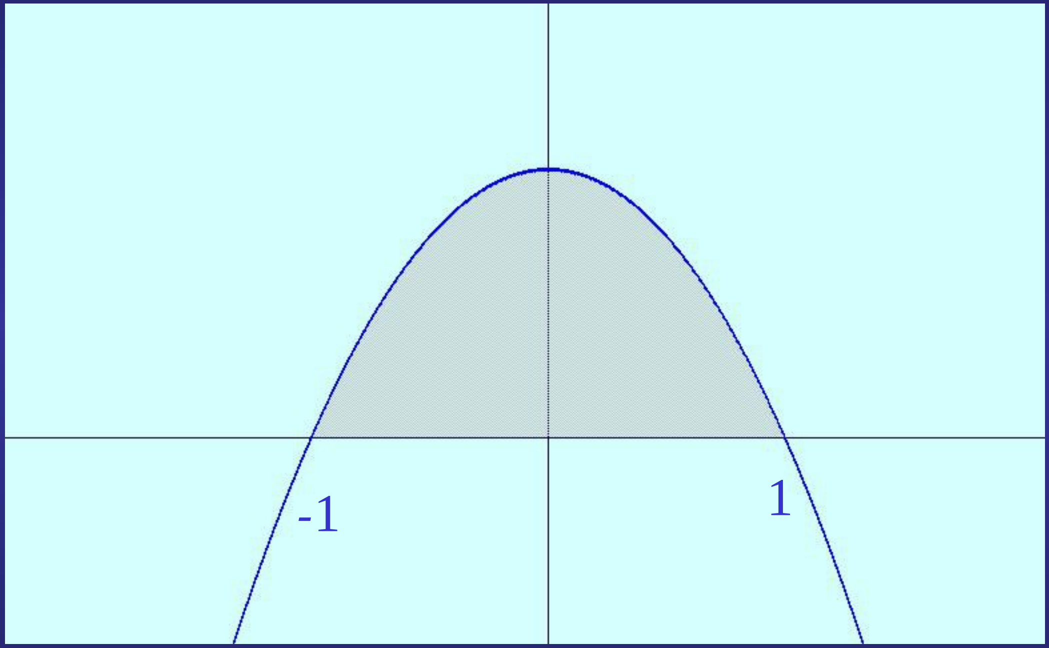
običajno meje intervala vključimo v oznake in pišemo:

$$P = \underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{} = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

določeni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

Primer

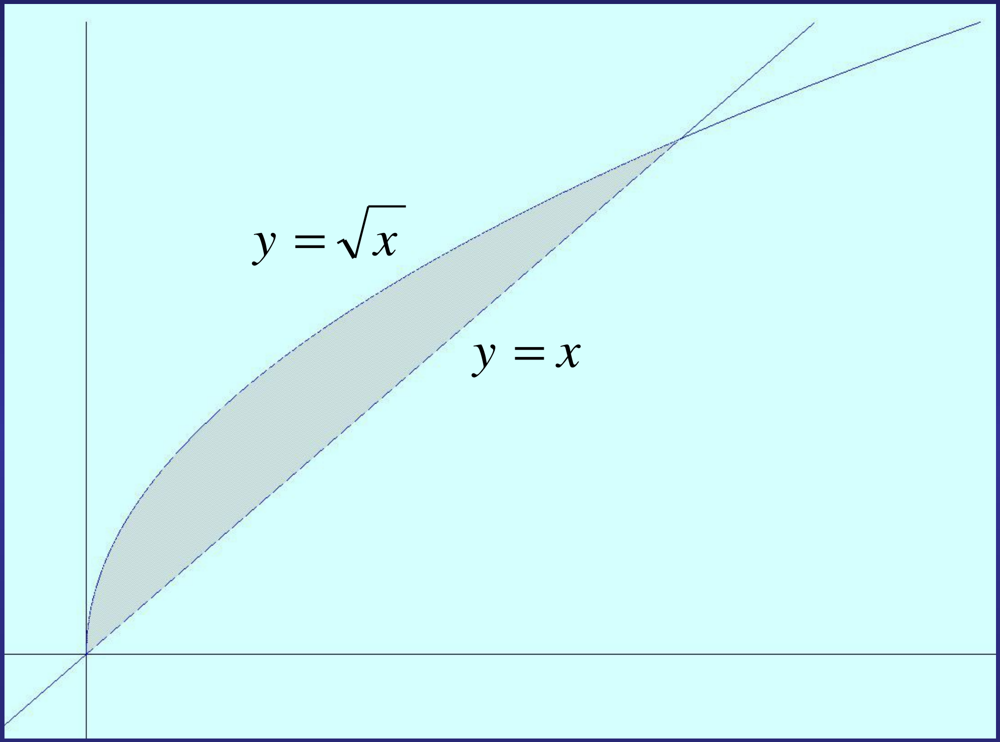
Določi ploščino lika, ki ga omejujeta abscisa in parabola $y=1-x^2$.



$$P=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = (1-\frac{1}{3})-(-1-\frac{-1}{3}) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Primer

Določi ploščino lika med $x=y^2$ in $y=x$.



$$P=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\boxed{\frac{1}{6}}$$

Dolžine krivulj

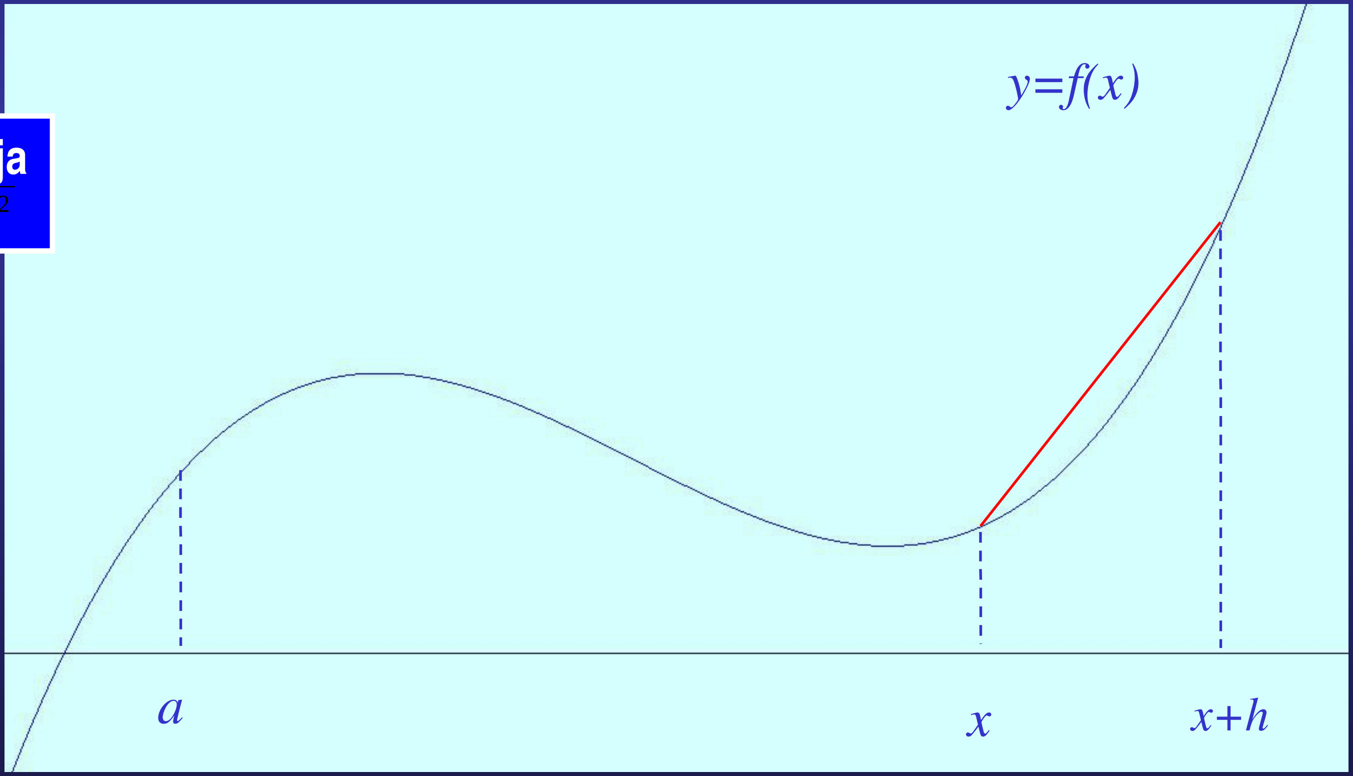
Želimo določiti dolžino krivulje, podane z $y=f(x)$.

$l(x)$ **je dolžina grafa na intervalu od** a **do** x.

$$l(x+h)-l(x)\approx\sqrt{(x+h-x)^2+(f(x+h)-f(x))^2}=h\cdot\sqrt{1+\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)^2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{l(x+h)-l(x)}{h}=\sqrt{1+(f'(x))^2}$$

$l(x)$ **je primitivna funkcija za** $\sqrt{1+(f'(x))^2}$

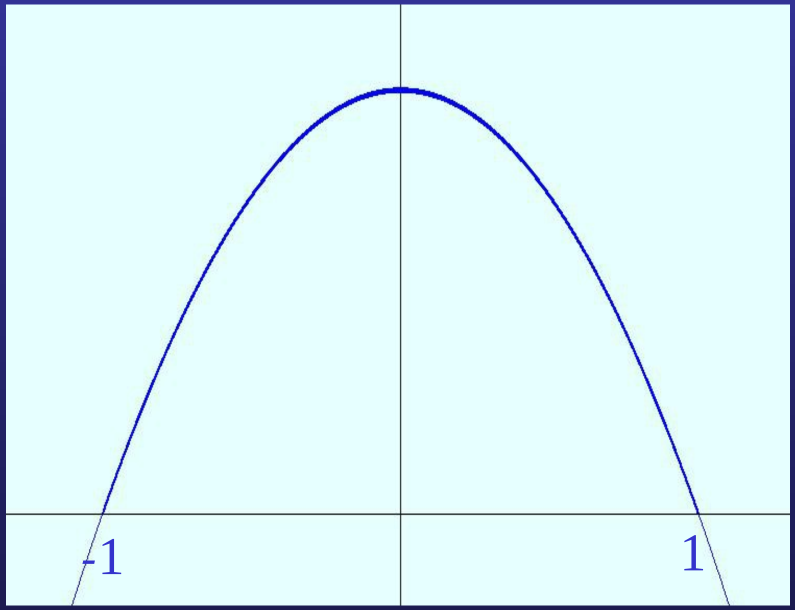


Dolžina krivulje, podane z $y=f(x)$ **na intervalu** $[a,b]$ **je**

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Primer

Izračunaj dolžino loka parabole $y=1-x^2$ **na intervalu** $[-1,1]$.



$$f'(x)=-2x$$

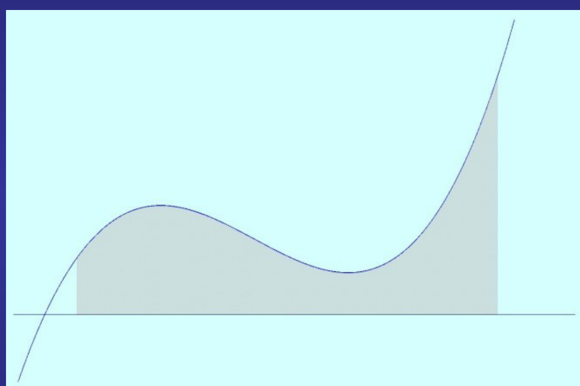
$$l=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4x^2}\,dx=$$

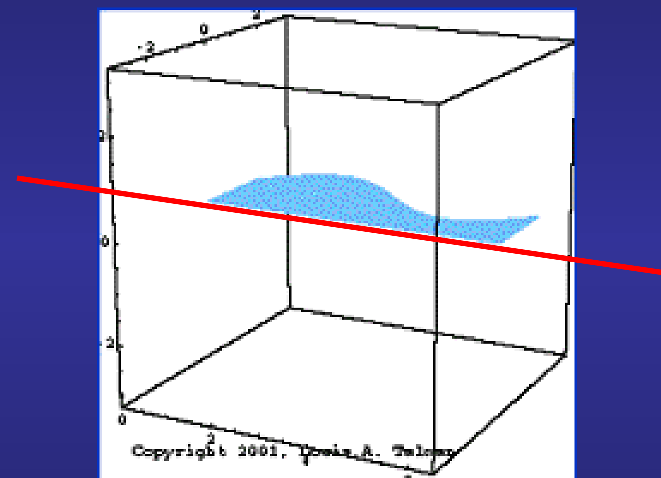
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\sqrt{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\approx 2.95$$

Vrtenine

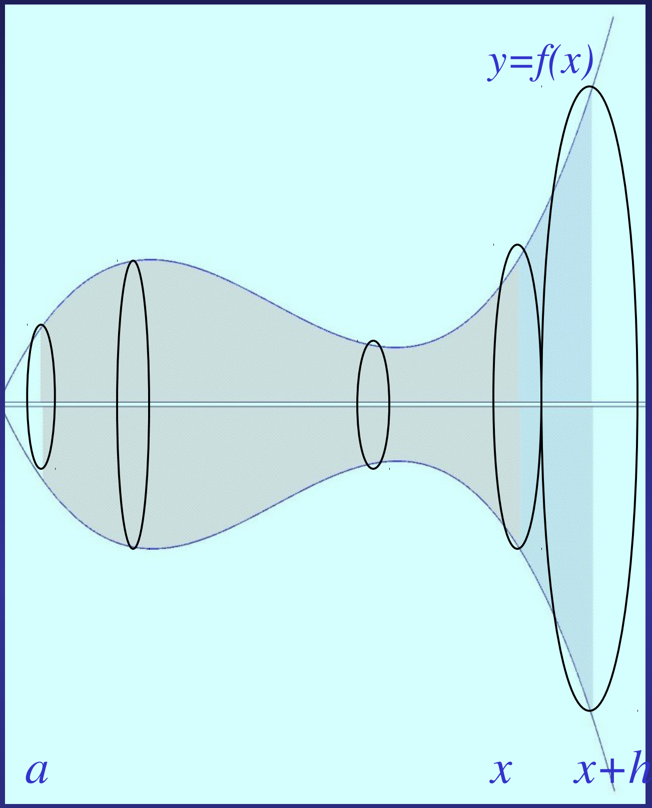
Vrtenina je telo, ki ga dobimo, ko dani lik zavrtimo okoli osi.





Izračunati želimo prostornino vrtenine.

Zavrtimo lik pod grafom krivulje $y=f(x)$:



$V(x)$ je prostornina na intervalu od a do x.

$$V(x+h)-V(x)\approx\left(f(x)\right)^2\pi\cdot h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h}=\left(f(x)\right)^2\pi$$

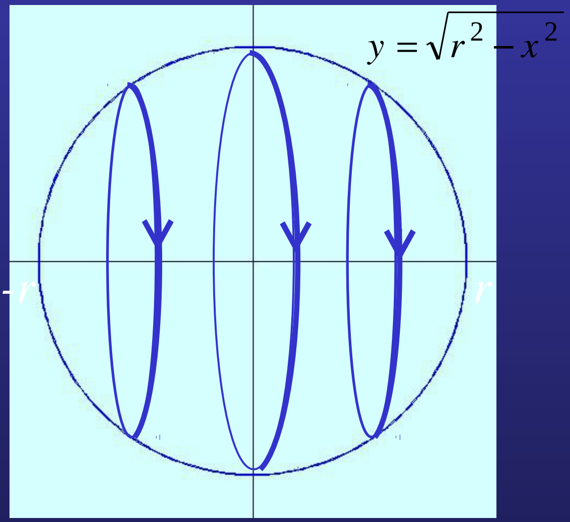
$V(x)$ je primitivna funkcija za $\left(f(x)\right)^2\pi$

Prostornina vrtenine pod $y=f(x)$ na intervalu $[a,b]$:

$$V=\pi\cdot\int_a^b\left(f(x)\right)^2\,dx$$

Primer

Prostornina krogle: kroglo dobimo, če zavrtimo krožnico okoli abscisne osi.



$$V=\pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\,dx$$

$$=\pi\cdot\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\cdot\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r}=$$

$$=\pi\cdot\left(\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right)=\frac{4}{3}r^3\pi$$

Približni izračun integrala

$\int_a^b f(x)\,dx$ računamo numerično, če je določanje primitivne funkcije prezahtevno ali če je integrand znan le v posameznih točkah.

Integrand $f(x)$ nadomestimo s približkom $g(x)$, ki ga znamo dovolj preprosto integrirati.

Približek izračunamo iz vrednosti integranda v izbranih delilnih točkah (včasih tudi iz vrednosti odvodov).

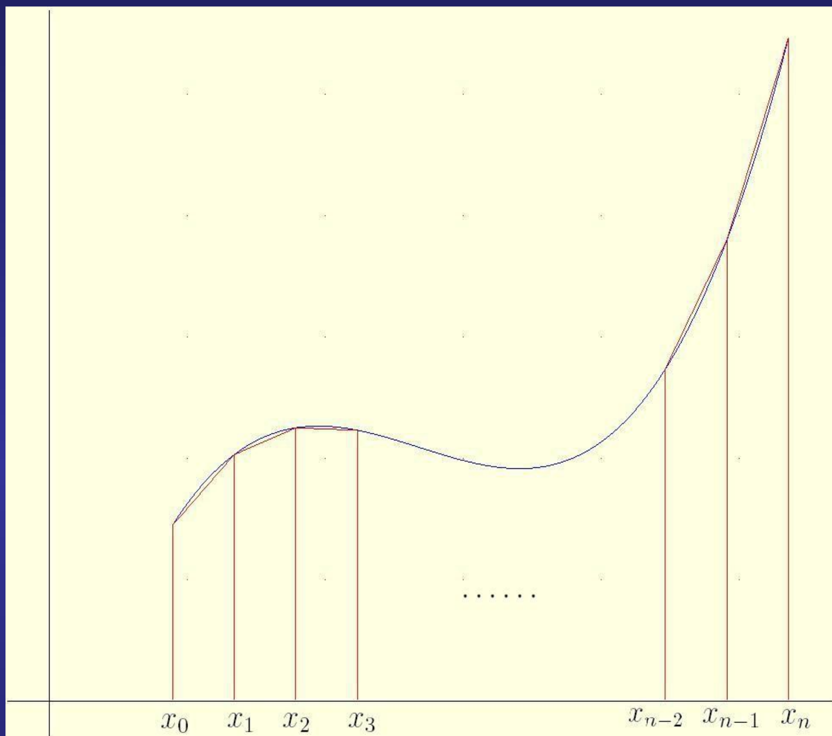
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + R$$

napaka, odvisna od metode in od števila delilnih točk

približna vrednost integrala

Metoda trapezov

integrand nadomestimo z odsekoma linearno funkcijo.



$[a,b]$ razdelimo na n enakih delov:

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$y_k = f(x_k)$$

g je odsekoma linearna funkcija, določena s točkami (x_k, y_k), $k=0,1,\ldots,n$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{2n} \cdot \left((y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \ldots + (y_{n-1} + y_n) \right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{b-a}{2n} \cdot \left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n \right)}_{\text{trapezna formula}} + R_n$$

napaka trapezne metode

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Primer

Izračunaj $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ z napako < 0.01

$$\left((\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}, \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0.6931 \right)$$

$$\frac{(1-0)^3}{12n^2} \cdot \max_{x\in[0,1]} \left| \left(\frac{1}{1+x} \right)'' \right| = \frac{1}{12n^2} \cdot \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{2}{(1+x)^3} \right| = \frac{1}{6n^2}$$

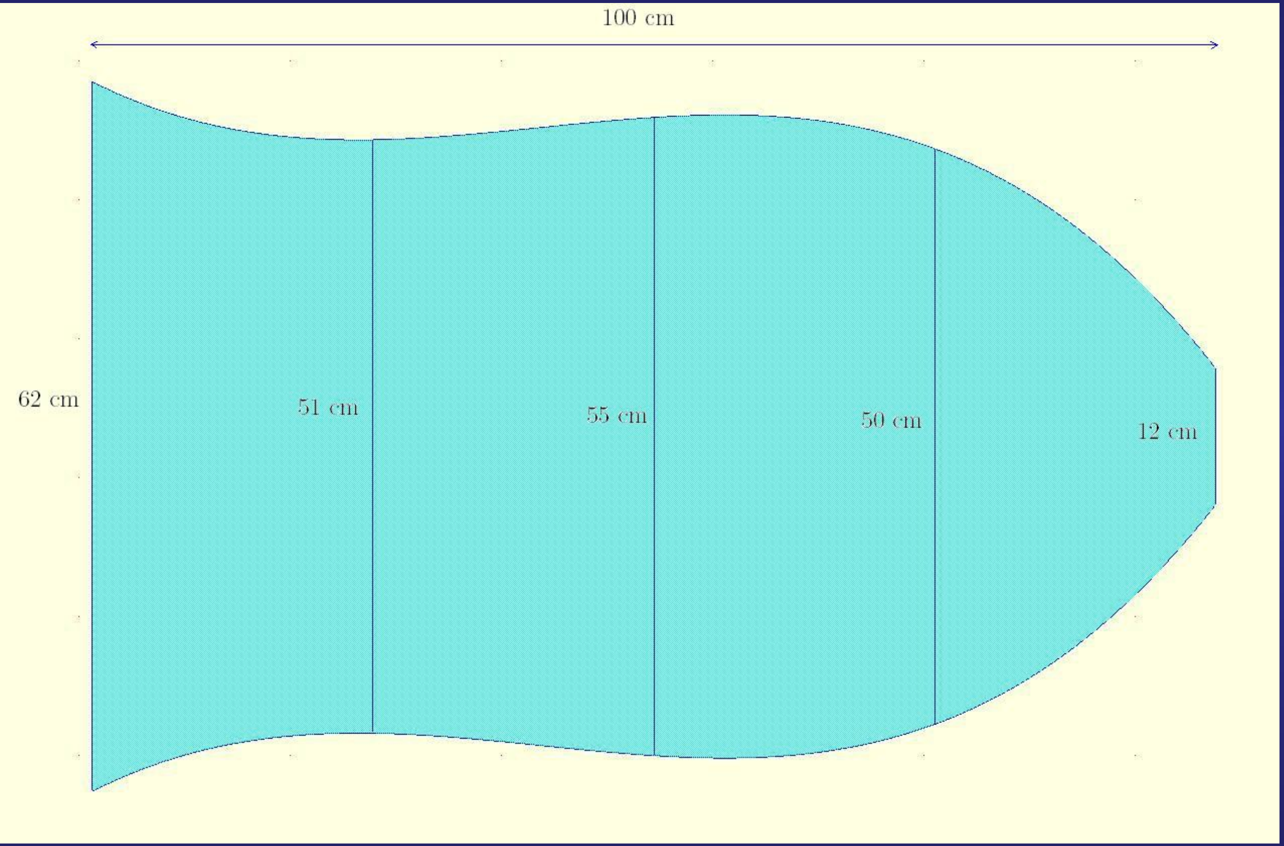
$$\frac{1}{6n^2} < 0.01 \;\Rightarrow\; n \geq 5$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx \frac{1}{10}\left(1.0000 + 2\cdot 0.8333 + 2\cdot 0.7143 + 2\cdot 0.6250 + 2\cdot 0.5555 + 0.5000\right) = 0.6956$$

(dejanska napaka 0.0025)

Primer

Oceni ploščino kosa pločevine:



$$P \approx \frac{100}{8}\left(62+2\cdot 51+2\cdot 55+2\cdot 50+12\right)=4825\ \text{cm}^2$$

Diferencialne enačbe

Diferencialna enačba je funkcijska enačba, v kateri nastopa odvod neznane funkcije.

Primeri

$y' = xy$ diferencialna enačba za y kot funkcijo x

$y' + 2y - 1 = 0$

$xy' = 1 - y^2$

$y'' - 2y' = x + y$ diferencialna enačba 2. reda
(Red diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda, ki v njej nastopa.)

$xy' + y''' e^y = x^2 y$ diferencialna enačba 3. reda

$z''_{xx} + z'_y = x$ parcialna diferencialna enačba (2. reda)

Diferencialne enačbe za funkcije ene spremenljivke imenujemo navadne, kadar nastopajo parcialni odvodi na več spremenljivk pa parcialne diferencialne enačbe.

$F(x, y, y') = 0$ splošna diferencialna enačba 1. reda

Rešitev diferencialne enačbe je funkcija $y=y(x)$, pri kateri je $F(x, y(x), y'(x))=0$ za vse x.

Primeri

- $y=e^{2x}$ je rešitev diferencialne enačbe $y'=2y$, saj je

$$\underbrace{(e^{2x})'}_{y'} = \underbrace{2e^{2x}}_{2y}$$

- $y=x^2$ ni rešitev diferencialne enačbe $y'=2y$, čeprav je $2x^2=2x^2$ za nekatere vrednosti x. Leva in desna stran morata biti enaki **za vse vrednosti argumenta x.**

Najpreprostejši tip diferencialne enačbe: $y' = f(x)$

Rešitev je: $y(x) = \int f(x)\, dx$

Tudi druge diferencialne enačbe skušamo prevesti na računanje integralov.

Primer

$y' = xy$

1. korak: pišemo $y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{y} = x\ dx$

2. korak: enačbo preoblikujemo tako, da so vsi y na eni in vsi x na drugi strani enačbe

3. korak: integriramo obe strani enačbe

$\int \frac{dy}{y} = \int x\ dx$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \boxed{y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}} \quad (C = e^c)$$

Preskus: $(C \cdot e^{\frac{x^2}{2}})' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{2x}{2} = x \cdot (C \cdot e^{\frac{x^2}{2}})$

Modeliranje z diferencialnimi enačbami

V fizikalnih in kemijskih zakonih praviloma nastopajo količine, ki so odvodi (hitrost gibanja, pospešek, toplotni tok, električni tok, hitrost reakcije, ...), zato študij fizikalnih in kemijskih procesov sloni na reševanju diferencialnih enačb.

Audi TT pospeši do hitrosti 100 km/h v 6.4 sekundah.
Koliko metrov pri tem prevozi?

t ..... čas

$y(t)$ ..... prevožena pot

hitrost je $v = y'(t)$

pospešek je $a = v'(t) = y''(t)$

Predpostavimo, da je pospešek konstanten:

$100 \text{ km/h} = 27.77 \text{ m/s}$

$a = 27.77/6.4 \text{ m/s}^2 = 4.34 \text{ m/s}^2$

$$v' = 4.34 \quad \Rightarrow \quad dv = 4.34\, dt \quad \Rightarrow \quad v = \int 4.34\, dt = 4.34\, t + c$$

Ker je na začetku $v(0)=0$, je $c=0$.

$$y' = 4.34\, t \quad \Rightarrow \quad dy = 4.34\, t\, dt \quad \Rightarrow \quad y = \int 4.34\, t\, dt = 4.34 \frac{t^2}{2} + c$$

Ker je na začetku $y(0)=0$, je $c=0$.

Hitrost 100 km/h doseže po $y(6.4) \approx 89$m.

Radioaktivni razcep

Hitrost razpadanja radioaktivne snovi je sorazmerna s količino snovi (reakcija 1. reda). Če imamo na začetku neko količino snovi (npr. 5g izotopa ^{14}C), kaj lahko povemo o količini snovi čez nekaj časa (npr. čez koliko časa bo ostalo le 3g ^{14}C)?

$y=y(t)$ količina snovi v trenutku t

$y'=-ky$ k je sorazmernostni faktor med količino snovi in hitrostjo razpadanja (npr. za ^{14}C je $k=3.83\ 10^{-12}\ s^{-1}$)

$$\frac{dy}{dt}=-ky \Rightarrow \frac{dy}{y}=-k\ dt \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int -k\ dt \Rightarrow \ln y=-kt+c \Rightarrow y=Ce^{-kt}$$

$y(0)=C,$ torej je C začetna količina opazovane snovi

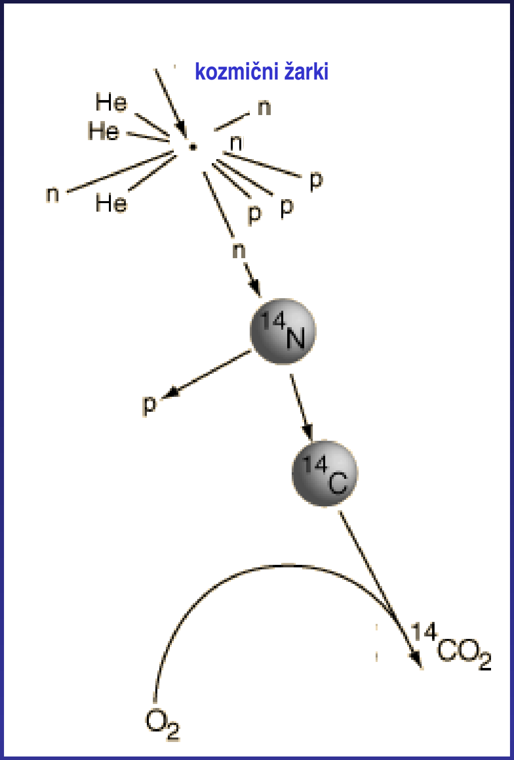
Za ^{14}C: $$3=5e^{-kt} \Rightarrow t=-\frac{\ln\frac{3}{5}}{k}=\frac{0.5108}{3.83\cdot 10^{-12}}=133368146214\ \text{s} \approx 4230\ \text{let}$$

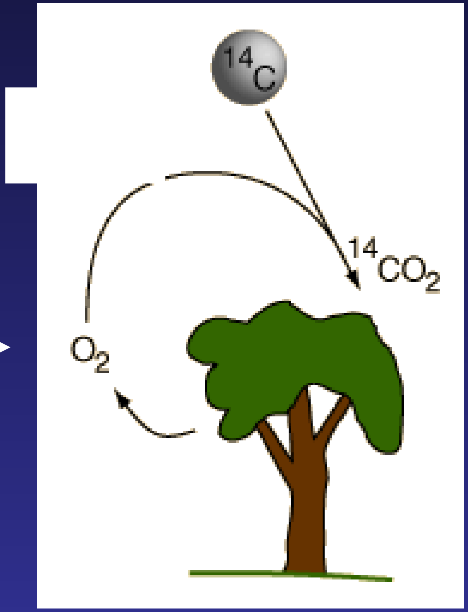
Diferencialna enačba skupaj z začetnim stanjem v celoti določa evolucijo sistema.

Hitrost razpadanja pogosto podamo z razpolovno dobo T: zveza s k je $kT=\ln 2$

Razpolovna doba ^{14}C je (0.6931/3.83) 10^{12} s $\approx$ 5730 let.

Datiranje s ^{14}C

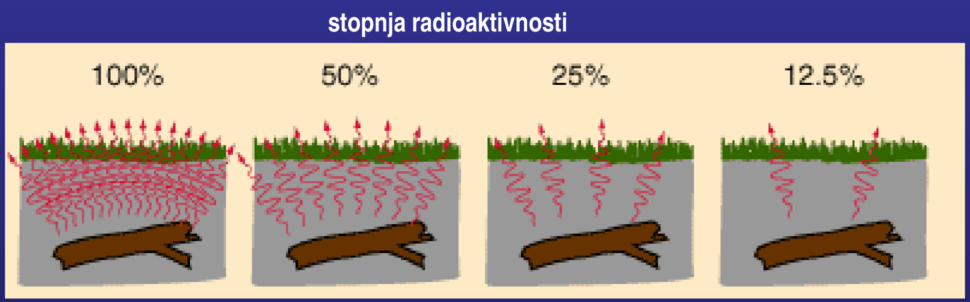




Rastline absorbirajo CO_2 v biosfero. Razmerje med ^{12}C in ^{14}C v živih bitjih je enako, kot v atmosferi.

Ogljikov izotop ^{14}C nastaja v višjih plasteh atmosfere, ko pod vplivom kozmičnih žarkov dva neutrona nadomestita dva protona v ^{14}N. Nastali ^{14}C se veže s kisikom v $^{14}CO_2$.

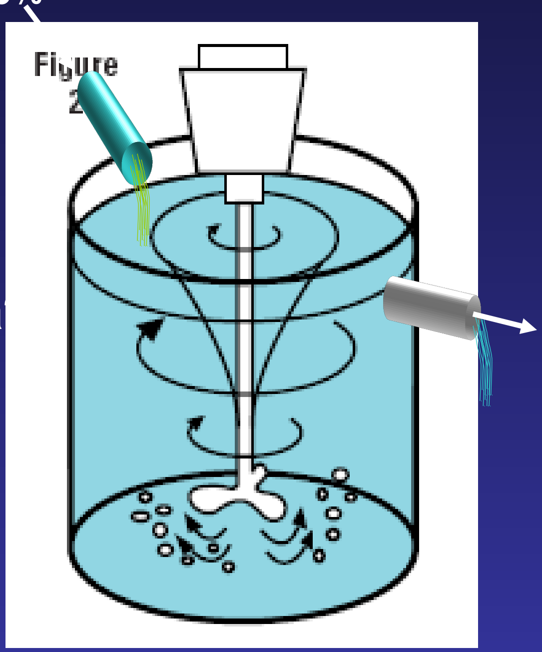
Razmerje med $^{14}CO_2$ in $^{12}CO_2$ v atmosferi je dokaj stabilno.



Ko ostanki živih bitij niso več v stiku z atmosfero se razmerje med ^{12}C in ^{14}C zaradi radioaktivnega razpada poveča v prid prvega. Starost ostankov ocenimo na podlagi primerjave stopenj radioaktivnosti.

Mešanje tekočin

V 50-litrsko posodo z 1% -raztopino soli začne s hitrostjo 2 l/min pritekati 3%-raztopina, obenem pa dobro premešana mešanica odteka z isto hitrostjo. Čez koliko časa bo v posodi 2%-raztopina?



$y=y(t)$ količina soli v posodi v trenutku t

$$dy = 0.03 \cdot 2 \cdot dt - \frac{y}{50} \cdot 2 \cdot dt$$

odteka y/50 od 2l na enoto časa

priteka 3% od 2l na enoto časa

sprememba količine soli v posodi

$$\frac{dy}{0.06-0.04y} = dt \quad \Rightarrow \quad -\ln(0.06-0.04y)\cdot\frac{1}{0.04} = t + c \quad \Rightarrow \quad y = 25(0.06 - Ce^{-0.04t})$$

$$y(0) = 0.5\,\mathrm{l} \quad \Rightarrow \quad C = 0.04 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1.5 - e^{-0.04t}$$

$$1.5 - e^{-0.04t} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-0.04t} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad t = -25\ln(0.5) = 17.33\,\text{min} = 17\,\text{min}\ 20\,\text{s}$$

Metabolizem tripsina

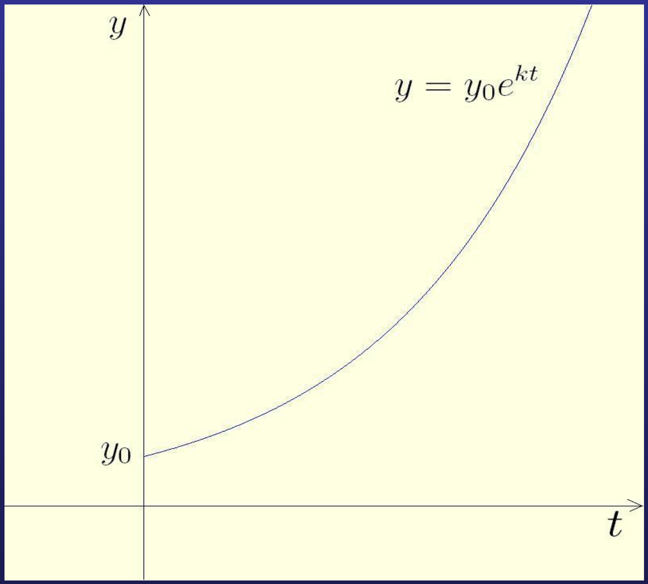
Tripsin je encim trebušne slinavke, ki nastane iz *tripsinogena.* V reakciji nastopa tripsin kot katalizator, zato je hitrost nastajanja tripsina sorazmerna z njegovo koncentracijo.

y_0 ………… začetna koncentracija tripsina

$y(t)$ ………… koncentracija tripsina v času *t*

$y' = ky$ ………… hitrost nastajanja je sorazmerna koncentraciji

To je ista diferencialna enačba, kot pri radioaktivnem razcepu. Rešitev je $y = y_0 e^{kt}$.



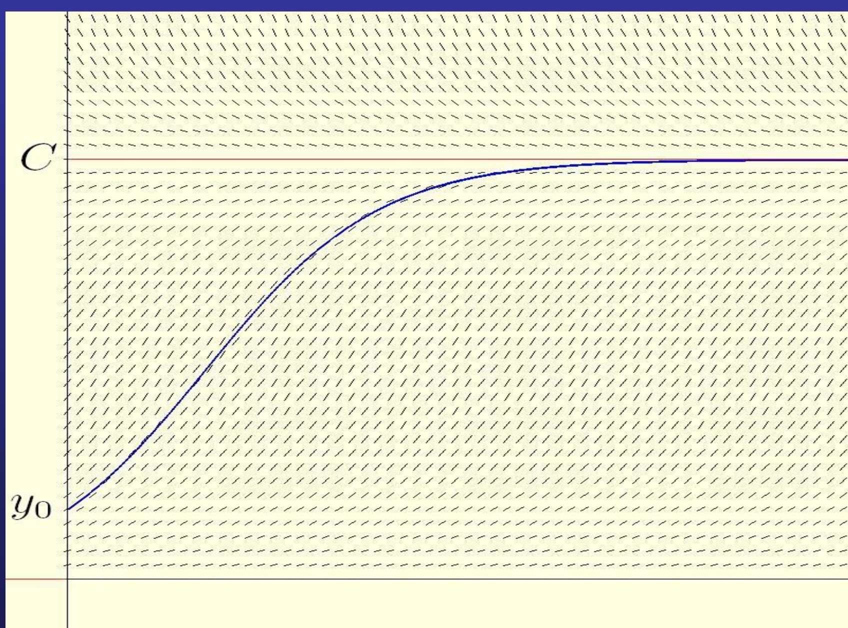
Model napoveduje eksponentno in neomejeno naraščanje količine tripsina. To se v resnici ne more zgoditi, zato sklenemo, da model ni ustrezen in ga skušamo popraviti.

Med reakcijo se tripsinogen porablja: iz vsake molekule tripsinogena nastane ena molekula tripsina. Zato privzamemo, da je hitrost reakcije sorazmerna tako koncentraciji tripsina, kot koncentraciji tripsinogena. Če je skupna koncentracija tripsina in tripsinogena C, začetna koncentracija tripsina pa y_0 dobimo diferencialno enačbo:

$$\begin{cases} y' = ky(C-y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{y(C-y)} = k\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y(C-y)} = \int_0^t k\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C} \ln \frac{(C-y_0)}{(C-y)} \cdot \frac{y}{y_0} = kt \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{C}{1+\left(\frac{C}{y_0}-1\right)e^{-Ckt}}$$



Dobljeni graf se imenuje *logistična krivulja*: popravljeni model napoveduje, da bo koncentracija tripsina zrasla do prvotne koncentracije tripsinogena, potem pa se bo ustalila.