# 2 IZREKI O ODVEDLJIVIH FUNKCIJAH

**Definicija 2.1.** *Funkcija $f$ ima v točki $x_0$* ***lokalni maksimum****, če obstaja taka dovolj majhna okolica točke $x_0$, da za vse $x$ iz te okolice velja: $f(x) < f(x_0)$. Funkcija $f$ ima v točki $x_0$* ***lokalni minimum****, če obstaja taka dovolj majhna okolica točke $x_0$, da za vse $x$ iz te okolice velja: $f(x) > f(x_0)$. Takim točkam z eno besedo rečemo* ***lokalni ekstremi.***

**Izrek 2.2.** *(**Fermat**) Če ima odvedljiva funkcija $f$ v točki $x_0$ lokalni ekstrem, je $f'(x_0) = 0$.*

Z drugimi besedami: Če ima funkcija $f$ v točki $x_0$ lokalni ekstrem, je $f'(x_0) = 0$ ali pa $f$ v točki $x_0$ ni odvedljiva. Pripomnimo, da iz dejstva, da je $f'(x_0)$ enak 0, ne sledi, da ima $f$ lokalni ekstrem. Primer: $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, vendar $f$, čeprav odvedljiva, v točki $x = 0$ nima lokalnega ekstrema, saj je naraščajoča.

*Dokaz Fermatovega izreka.* Denimo, da ima $f$ v točki $x_0$ lokalni maximum. Potem za vsak $x$ iz dovolj majhne okolice točke $x_0$ velja: $f(x) < f(x_0)$. Izračunajmo levi in desni odvod funkcije $f$ v točki $x_0$ :

$$\begin{aligned}
f'_+(x_0) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \\
f'_-(x_0) &= \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.
\end{aligned}$$

Ker je funkcija v točki $x_0$ odvedljiva, je

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0,$$

od koder sledi, da je $f'(x_0) = 0$.

**Izrek 2.3.** *(**Rolle**) Naj bo funkcija $f$ na definirana in zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na $(a, b)$. Poleg tega naj ima na krajiščih intervala $[a, b]$ enaki vrednosti: $f(a) = f(b)$. Potem obstaja točka $\xi \in (a, b)$, v kateri je odvod enak 0: $f'(\xi) = 0$.*

Zvezna in odvedljiva funkcija z enakim vrednostima v krajiščih intervala ima v notranjosti intervala vsaj eno točko, kjer je tangenta na graf vodoravna (vzporedna z osjo $x$).

*Dokaz Rolleovega izreka.* Za konstantno funkcijo $f$ izrek očitno velja, saj je $f'(x) = 0$ za vsak $x$. Naj bo torej $f$ nekonstantna funkcija. Pri nekem $x_0$ je $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$ in recimo, da je $f(x_0) > f(a)$. Funkcija $f$ je zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$, zato doseže svoj maksimum $M$. Naj bo $f(\xi) = M$ pri nekem $\xi \in (a, b)$ in izračunajmo še $f'(\xi)$. Pri tem bomo upoštevali, da je

$$f(a) < f(x_0) \leq f(\xi) = M.$$

Torej,

$$\begin{aligned} f'_{-}(\xi) &= \lim_{h\to 0-} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0-} \frac{f(\xi+h)-M}{h} \geq 0 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} f'_{+}(\xi) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-M}{h} \leq 0. \end{aligned}$$

Podobno kot v dokazu Rolleovega izreka ugotovimo, da je $f'(\xi)=0$.

**Izrek 2.4.** ***(Cauchy)****. Bodita $f$ in $g$ zvezni na $[a,b]$ in odvedljivi na $(a,b)$. Dodatno naj funkcija $g$ še izpolnjuje pogoja: $g'$ na $(a,b)$ nima nobene ničle in $g(b)\neq g(a)$. Potem obstaja taka točka $\xi\in(a,b)$, da je*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*Dokaz.* Definirajmo novo funkcijo $h(x)=f(x)-\alpha g(x)$, ki je gotovo zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na $(a,b)$. Konstanto $\alpha$ določimo tako, da bo $h(a)=h(b)$. Če tako konstanto lahko izračunamo, bo funkcija $h$ izpolnjevala pogoje Rolle-ovega izreka in bo za neki $\xi\in(a,b)$ izpolnjeno $h'(\xi)=0$.

Izračunajmo $\alpha$ :

$$h(a)=f(a)-\alpha g(a)=f(b)-\alpha g(b)=h(b)$$

Iz enačbe na sredini sledi

$$\alpha(g(b)-g(a))=f(b)-f(a)$$

in je torej

$$\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Po drugi strani pa mi pogoj $h'(\xi)=0$ pove: $f'(\xi)-\alpha g'(\xi)=0$ oziroma

$$\alpha=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

kar je bil naš cilj.

**Izrek 2.5.** ***(Lagrange)****. Naj bo funkcija $f$ na definirana in zvezna na $[a,b]$ ter odvedljiva na $(a,b)$. Potem obstaja taka točka $\xi \in (a,b)$, da je*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a))$$

Ta izrek nam pove, da obstaja taka točka, kjer je tangenta na graf vzporedna sekanti skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$. Tam je $k_t = f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k_s$.

*Dokaz.* Lagrangev izrek je direktna posledica Cauchyjevega izreka. Za funkcijo $g$ v C. izreku vzamemo kar $g(x) = x$ in rezultat takoj sledi.

**Posledice Lagrangevega izreka:**

1. Če je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je $f$ konstantna funkcija.
2. Če je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je $f$ naraščajoča funkcija.
3. Če je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je $f$ padajoča funkcija.

**Izrek 2.6.** ***(L'Hospitalovo pravilo)****Naj bosta funkciji $f$ in $g$ zvezno odvedljivi (torej tudi zvezni) na neki punktirani okolici točke $a$. Naj bo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ in $g(x)$, $g'(x) \neq 0$ na neki punktirani okolici točke $a$. Potem je*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Če je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, isto velja tudi za limito $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

To pravilo nam omogoča učinkovito računanje limit, predvsem takih, kjer nastopajo funkcije, ki se z odvajanjem poenostavijo.

L'Hospitalovo pravilo velja tudi splošneje: za leve in desne limite, limite v neskončnosti in tudi za nedoločenosti tipa $\frac{\infty}{\infty}$.

Zgledi:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} \overset{\text{L.p.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0.$

*Dokaz (delni) L'Hospitalovega pravila.* Najprej funkciji $f$ in $g$ zvezno razširimo še na točko $a$ :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x); & x \neq a \\ 0; & x = a \end{cases} ; \qquad \bar{g}(x) = \begin{cases} g(x); & x \neq a \\ 0; & x = a. \end{cases}$$

Potem je $\bar{f}(a) = \bar{g}(a) = 0$ in $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$. Funkciji $\bar{f}$ in $\bar{g}$ sta zvezni na $[a,x]$, če je le $x$ dovolj blizu $a$, odvoda $\bar{f}$ 'in $\bar{g}'$ pa zvezni fukciji na $(a,x)$. V točki $a$ ni treba, da sta funkciji $f$ in $g$ odvedljivi. Uporabimo Cauchyjev izrek za funkciji $\bar{f}$ in $\bar{g}$. Za neki $\xi \in (a, x)$ je

$$\frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(a)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(a)} = \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \frac{\bar{f}'(\xi)}{\bar{g}'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{saj je } a < \xi < x \text{ ter } f',\ g' \text{ zvezni in } g' \neq 0. \end{aligned}$$