KOMPLEKSNA ŠTEVILA

Enačba $x^2 + 1 = 0$ v množici realnih števil nima nobene rešitve, saj je $x^2 \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in tako ne more biti enak -1.

Uvedemo novo množico števil: kompleksna števila $\mathbb{C}$

$i := \sqrt{-1}$ **imaginarna enota**, $\quad i^2 = -1$

$a, b \in \mathbb{R}, \qquad \underbrace{a + ib}_{\textbf{kompleksno število}}$

$\mathbb{C} = \{a + ib;\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, saj je $a = a + i0$ za vsak $a \in \mathbb{R}$

$a = \operatorname{Re} z$ **realna komponenta**

$z = a + ib,$

$b = \operatorname{Im} z$ **imaginarna komponenta**

Realna in imaginarna komponenta sta **realni** števili.

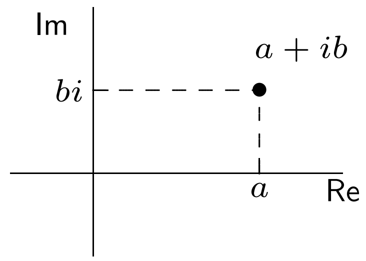
Računske operacije v $\mathbb{C}$

- seštevanje: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$
- množenje $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$
- konjugiranje $z = a + ib \Rightarrow \overline{z} = a - ib$

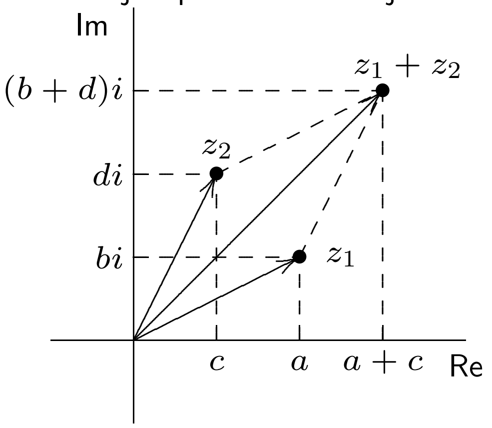
Predstavitev v **Gaussovi ravnini**

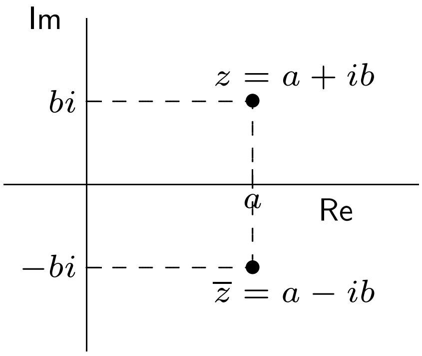
$\mathbb{C} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$a + ib \mapsto (a, b)$



Geometrijski pomen seštevanja in konjugiranja: $z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id$





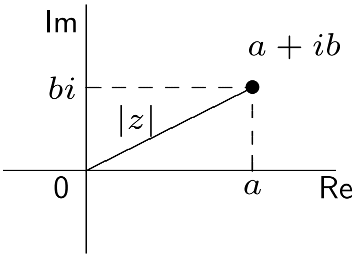
Lastnosti konjugiranja

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $z\overline{z} \geq 0$
5. $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \mathrm{Im}\, z = -\frac{i}{2}(z - \overline{z})$

$z = a + ib,\ \overline{z} = a - ib \Rightarrow z\overline{z} = a^2 + b^2$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ **absolutna vrednost kompleksnega števila**

Geometrijski pomen: oddaljenost točke $z = a + ib$ od koordinatnega izhodišča.



Sedaj pa lahko definiramo tudi deljenje kompleksnih števil:

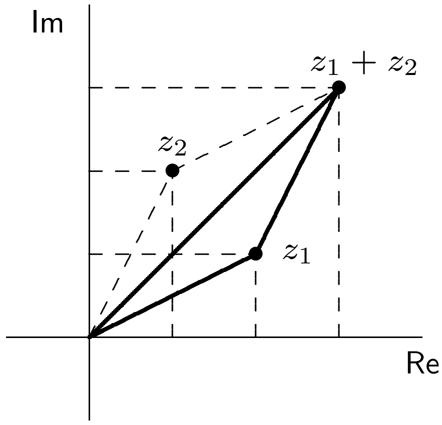
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2}$

$\frac{2+i}{3-2i} = \frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{4+7i}{|3-2i|^2} = \frac{4+7i}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$

Kompleksna števila so za operaciji seštevanja in množenja komutativni obseg; torej za ti dve operaciji veljajo ista računska pravila kot za realna števila.

Lastnosti absolutne vrednosti:

1. $|\overline{z}| = |z|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
3. $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **trikotniška neenakost**



Razdalja

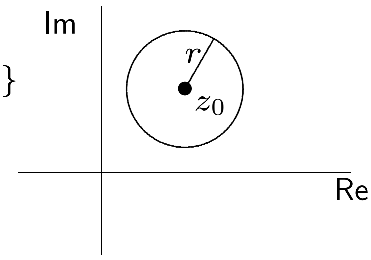
$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$

$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|$

Nekaj podmnožic kompleksne ravnine

1. $z_0 \in \mathbb{C}, \ r \geq 0$

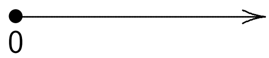
   $\{z;\ |z - z_0| \leq r\} = \{z;\ d(z, z_0) \leq r\}$



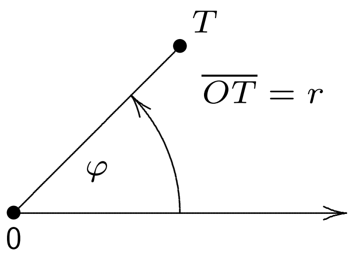
2. z_1, z_2 dani kompleksni števili
   $\{z;\ |z - z_1| = |z - z_2|\} = \{z;\ d(z, z_1) = d(z, z_2)\}$
   simetrala daljice med točkama z_1 in z_2

Polarni zapis kompleksnih števil

V ravnini izberemo točko 0 (**koordinatno izhodišče)** in poltrak (**polarna os).**
Tako smo dobili **polarni koordinatni sistem**:

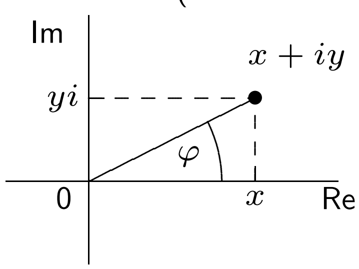


V tem koordinatnem sistemu predstavimo točko T s parametroma:
- r....oddaljenost točke T od izhodišča 0
- φ....kot med polarno osjo in daljico $0T$, merjen v nasprotni smeri urinega kazalca. Če je $r = 0$, φ ni definiran.



Zveza med kartezičnimi in polarnimi koordinatami

Polarni in kartezični koordinatni sistem združimo tako, da se polarna os ujema s pozitivnim poltrakom osi x (realne osi Gaussove ravnine).



$\cos\varphi = \frac{x}{r}$
$\sin\varphi = \frac{y}{r}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Če iz teh relacij izpeljemo

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

smo tako dobili formule za izračun kartezičnih koordinat iz polarnih.
Kompleksno število $x + iy$ lahko nato zapišemo v obliki

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

polarni zapis kompleksnega števila

Izračun polarnih koordinat iz kartezičnih:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Absolutno vrednost r imenujemo tudi **modul**, polarni kot φ pa **argument**.
Zapišemo $\varphi = \arg z$.

Zgleda:

- Zapišimo $z = 1 + i$ v polarni obliki. Izračunati je treba modul r in argument φ.
  $r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$, torej je $r = \sqrt{2}$
  $\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$, torej ima φ vrednost bodisi $\frac{\pi}{4}$ bodisi $\pi + \frac{\pi}{4}$. Ker leži kompleksno število $z = 1 + i$ v 1. kvadrantu, izberemo $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Sledi
  $z = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
- Če pa je $z = -1 - i$, je $r = \sqrt{2}$, prav tako je $\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1$. Vendar je sedaj z v 3. kvadrantu, zato je $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ in

$z = \sqrt{5}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

V obeh primerih smo za kot φ izbrali vrednost iz intervala $[0, 2\pi)$.
Zapis kompleksnega števila v polarni obliki, če privzamemo, da je lahko kot $\varphi \in \mathbb{R}$, pa ni enoličen.

Definicija. *Kompleksni števili* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *in* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *sta* ***enaki*** *natanko takrat ko velja*

$$r_1 = r_2$$
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z},\quad r \neq 0.$$

Velja torej $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$.

Računanje s kompleksnimi števili v polarni obliki:

$z_1=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)$
$z_2=r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)$
Izračunajmo produkt z_1 in z_2 :

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1r_2\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)=\\
&= r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right)=\\
&= r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
\begin{aligned}
|z_1z_2| &= r_1r_2\\
\arg\left(z_1z_2\right) &= \arg z_1+\arg z_2+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Kompleksni števili v polarni obliki zmnožimo tako, da zmnožimo absolutni vrednosti (modula), kota (argumenta) pa seštejemo.

Zgled.
Naj bo $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ poljubno kompleksno število, $w=\cos\alpha+i\sin\alpha$ pa število z enotske krožnice ($|w|=1$). Kaj geometrijsko predstavlja preslikava

$$z\mapsto zw$$

oziroma množenje s številom iz enotske krožnice?
$zw=r\left(\cos\left(\varphi+\alpha\right)+i\sin\left(\varphi+\alpha\right)\right)$.
Kot vidimo, se je modul ohranil kot pa se je povečal za α. Torej gre za rotacijo za kot $\alpha=\arg w$ okrog izhodišča.

Potenciranje v polarni obliki

$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$
$z^2=r^2\left(\cos\left(\varphi+\varphi\right)+i\sin\left(\varphi+\varphi\right)\right)=r^2\left(\cos2\varphi+i\sin2\varphi\right)$
Če bi nadaljevali in izračunali še z^3, z^4, bi hitro lahko postavili domnevo

$$z^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Moivre-ova formula

Formulo dokažemo z matematično indukcijo.

- Za $n=1$ očitno velja.

- $z^{n+1} = z^n z = r^{n+1}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$
  $= r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi)$.

Izračunajmo $(1+i)^9 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^9 = \left(\sqrt{2}\right)^9\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) =$
$= 2^4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 16(1+i)$

Moivre-ova formula velja tudi za negativne eksponente in 0:

$n = -1, \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r \neq 0.$
$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r^{-1}\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$
V zgornjem računu smo upoštevali, da je $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ in $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$.
$n = 0: \quad r^0(\cos 0\varphi + i\sin 0\varphi) = 1.$

Eksponentni zapis kompleksnega števila

je različica zapisa kompleksnega števila v polarni obliki.

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Nato lahko vsako kompleksno število zapišemo kot:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Lastnosti $e^{i\varphi}$:

1. $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$
2. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
3. $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$
4. $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}$
5. $e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Enačba $z^n = a$

$a \in \mathbb{C}$ in $n \in \mathbb{N}$ naj bosta dani števili. iščemo vsa taka kompleksna števila, da bo $z^n = a$. Vse rešitve, ki jih bomo tako dobili, bodo vrednosti n-tega korena iz števila a.
Rešitev poiščemo v obliki $z = re^{i\varphi}$. Tudi dano število a zapišemo v eksponentnem zapisu: $a = |a|\,e^{i\alpha}$. Sedaj se enačba $z^n = a$ glasi:

$$\begin{aligned} \left(re^{i\varphi}\right)^n &= |a|\,e^{i\alpha} \\ r^n e^{in\varphi} &= |a|\,e^{i\alpha} \\ r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) &= |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{aligned}$$

V zadnji vrstici imamo enakost dveh kompleksnih števil v polarni obliki; od tod dobimo

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[n]{|a|} \\ n\varphi &= \alpha + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Pri $k = n$ bi dobili isto rešitev kot pri $k = 0$, pri $k = n + 1$ isto kot pri $k = 1$ in tako naprej.