LIMITA FUNKCIJE

1. LIMITA V TOČKI

Naj bo $\varepsilon > 0$ in $a \in \mathbb{R}$.

ε-**okolica (**ali na kratko kar okolica) točke a je interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
Punktirana ε-**okolica** točke a je interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$.
Punktirano okolico točke a dobimo torej tako, da iz ε-okolice točke a izrežemo njeno središče (točko a).
Zanimalo nas bo obnašanje funkcije f v neki dovolj majhni punktirani okolici točke a.
Zgled $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ta funkcija v $a = 0$ očitno ni definirana, njene vrednosti pa lahko izračunamo za vse x iz neke punktirane okolice. Izračunajmo nekaj vrednosti $f(x)$ za nekaj argumentov x, ki so blizu a.

$f(0.4) = 0.973\,55$
$f(0.3) = 0.985\,07$
$f(0.2) = 0.993\,35$
$f(0.1) = 0.998\,33$
$f(0.05) = 0.999\,58$

Videti je, da bliže kot je x k $a = 0$, bolj se funkcijske vrednosti $f(x)$ približajo številu 1. Vrednost $f(a) = f(0)$ pa sploh ni definirana.
Definicija. Število L je **limita funkcije** f **v točki** a, če lahko dosežemo, da se funkcijske vrednosti $f(x)$ od števila L poljubno malo razlikujejo, če je le x (ki je različen od a) izbran dovolj blizu točke a.
Zapis: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
V prejšnjem primeru je videti, da je število 1 limita funkcije $\frac{\sin x}{x}$ v točki 0 oziroma $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Še enkrat zapišimo definicijo bolj formalno:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pri poljubnem vnaprej izbranem $\varepsilon > 0$ obstaja tak pozitiven δ, da se števila x (različna od a), ki so za manj kot δ oddaljena od a preslikajo v ε-okolico števila L.
Ponavadi je δ odvisen od ε in sicer je pogosto tako, da manjši kot je ε, manjši bo tudi δ.
Leva in desna limita:
leva limita: $L_l = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$,   Opazujemo samo vrednosti $f(x)$ za $x < a$
desna limita: $L_d = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ Opazujemo samo vrednosti $f(x)$ za $x > a$.
Zgled:
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x}{x} = -1$

Trditev. Funkcija ima v točki a limito natanko tedaj ko ima v tej isti točki **levo in desno** limito ter sta **enaki**. Potem je tudi $L = \lim\limits_{x \to a} f(x) = L_l = L_d$.

2. LIMITA V NESKONČNOSTI

$L = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ pomeni naslednje: Vrednosti funkcije se poljubno približajo L, če smo le x izbrali dovolj velik.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists M : \quad x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$L = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists m : \quad x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Zapis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ pomeni, da vrednosti funkcije f presežejo katerokoli vnaprej izbrano vrednost M, če je le x dovolj blizu a.

$$\forall M \quad \exists \delta > 0 : \ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Analogno $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ pomeni, da je $f(x)$ manj od poljubnega m, če je le x dovolj blizu točki a.
Podoben zapis uporabljamo tudi za limito v neskončnosti ($+\infty$ ali $-\infty$).

3. PRAVILA ZA RAČUNANJE LIMITE

(veljajo za vse tipe limit: v točki ali v neskončnosti, leva, desna)

- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)\, g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, če $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to a} A = A$, če je $A =$konstanta
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{A}{f(x)} = 0$,
  če je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ali $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
- $\forall\, x \in \mathcal{O}(a) : f(x) < g(x)$ ali $\forall\, x \in \mathcal{O}(a) \ : \ f(x) \leq g(x)$
  $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$, $n \in \mathbb{N}$
  če je n sodo število, mora biti $f(x) \geq 0$ vsaj na neki okolici števila a.
- $\lim\limits_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \to a} f(x)}, \ \ b > 0, b \neq 1.$

Zgledi:

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$. Vidimo, da je $f(1) = 0$ in $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.
   Če je funkcija v točki a definirana, se njena funkcijska vrednosti $f(a)$ lahko razlikuje od limite.
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+3) = 4$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \quad k > 0$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty, \quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty,$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$
8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

Kasneje (v poglavju o odvodih) bomo spoznali še eno učinkovito metodo za računanje limit: L'Hospitalovo pravilo.