OSNOVE TEORIJE MNOŽIC

Cantor (1874-1895) je množico opredelil kot skupnost določenih različnih predmetov iz našega nazornega ali miselnega sveta, ki jo imamo za celoto.

Predmete, ki so v množici, imenujemo **elemente**.

Izkazalo se je, da je ta defincija preveč širokosrčna. Izmislimo si lahko namreč take skupine reči, da nas to pripelje v protislovje.

Denimo, da obstaja množica vseh množic, ki nimajo same sebe za element.

$$B = \{X;\ X \text{ ni element same sebe}\}$$

To bi imelo za posledico, da

$$B \in B \iff B \text{ nima same sebe za element.}$$

To je znameniti **Russellov paradoks**. Izognemu se mu tako, da eksistenco množic zagotovimo z aksiomi. V tem kontekstu pa množice ne morejo imeti same sebe za element, protislovnen pojem pa je tudi npr. množica vseh množic.

Množice bomo označevali z velikimi tiskanimi črkami: A, B, C, $\ldots$, X, Y, $\ldots$,
elemente množic pa z malimi: a, b, c, $\ldots$, x, y, $\ldots$.

$a \in A$ $\quad$ a je element množice A
$a \notin A$ $\quad$ a ni v množici A.

Če ima množica A malo elementov, jih kar naštejemo, npr.:

$A = \{x, y, z\}$.

Kadar pa je elementov preveč, da bi jih naštevali:

$A = \{x;\ x$ ima določeno "smiselno" lastnost$\}$

$A = \{x;\ x$ je državljan Slovenije$\}$

$$B = \{y;\ y = n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \text{ in } n \text{ je naravno št.}\}$$
$$= \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 29,\ \ldots\}$$

Definicija. $A \subseteq B$

A je podmnožica B, če so vsi elementi množice A tudi elementi množice B.

$A \subseteq B \iff \forall x :\ x \in A \Rightarrow x \in B.$

Prazna množica je množica, ki nima nobenega elementa. Oznaka: ϕ, včasih tudi $\{\}$. Prazna množica je podmnožica vsake množice.

Vsaka množica je tudi podmnožica same sebe. $\quad A \subseteq A$.

Množica B je **prava** podmnožica množice A, če
1. B ni prazna
2. A vsebuje vsaj en element, ki ga v B ni.

Množici A in B sta **enaki**, kadar je $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$.
Takrat velja tudi: $\forall x : x \in A \iff x \in B$

Če je elemente množice moč prešteti, imenujemo število elementov **moč** množice.
Oznaka $|A|$ označuje moč množice A.

$A = \{a, b, c\} \Rightarrow |A| = 3.$

Množice lahko ponazorimo z Venovimi diagrami.

Definicija. *__Potenčna množica__ (ali __partitivna množica__) $\mathcal{P}A$ je množica vseh podmnožic množice A.*

$\mathcal{P}A = \{B;\ B \subseteq A\}$

Zgled: $A = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{P}A = \{\phi,\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Trditev. *Moč potenčne množice $\mathcal{P}A$ je 2^n, če ima A natanko n elementov.*

ALGEBRSKA STRUKTURA NAD POTENČNO MNOŽICO

V dani množici imamo algebrsko strukturo, če z elementi te množice lahko računamo.

U dana množica (**univerzalna** množica)

V $\mathcal{P}U$ bomo uvedli računske operacije; računali bomo s podmnožicami množice U.

Definicija. *V __komplementu__ množice A so natanko tisti elementi, ki niso v A.*

$A^C = \{x;\ x \in U \text{ in } x \notin A\}$

$U^C = \phi \quad \phi^C = U$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{1, 2, 5\} \quad A^C = \{3, 4, 6\}$

Definicija. *__Presek__ množic A in B je množica vseh tistih elementov, ki so hkrati elementi množice A in elementi množice B.*

$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ in } x \in B\}$

Če je $A \cap B = \phi$, rečemo, da sta množici A in B **disjunktni.**

Velja še: $A \cap B \subseteq A \quad A \cap B \subseteq B.$

Definicija. *__Unija__ $A \cup B$ vsebuje natanko tiste elemente, ki pripadajovsaj eni izmed množic A ali B.*

$A \cup B = \{x;\ x \in A$ *ali* $x \in B\}$

$A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B$
Če je $C = A \cup B$ in $A \cap B = \phi$, rečemo, da je C **disjunktna unija** množic A in B.

Definicija. ***Razlika*** *$A \backslash B$ vsebuje natanko tiste elemente, ki so v A in niso v B.*
$A \backslash B = \{x;\ x \in A$ *in* $x \notin B\}$

$A \backslash B \subseteq A, \quad A \backslash B = A \cap B^C$

Za poljubne množice A, B in C v univerzalni množici U veljajo za zgoraj definirane operacije naslednje lastnosti:

- komutativnost unije in preseka:
  $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$
- asociativnost unije in preseka
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributivnost
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- obstoj enote za operaciji $\cup$ in $\cap$
  $A \cup \phi = A \qquad A \cap U = A$
- De Morganova zakona za komplementiranje
  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$\mathcal{P}U$ je za operacije $\cap$, $\cup$ in komplementiranje **Boolova algebra**.

Kartezični produkt

Definicija. ***Kartezični produkt*** *$A \times B$ je množica vseh urejenih parov (a, b), kjer je $a \in A$ in $b \in B$.*
$A \times B = \{(a, b);\ a \in A$ *in* $b \in B\}$

Zgled:
$A = \{a, b\} \quad B = \{1, 2, 3\}$
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
Vidimo, da nasploh $A \times B \neq B \times A$.
$A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$