1 INTEGRAL

1.1 Nedoločeni integral

1.1.1 Definicija in lastnosti

Newton in Leibniz sta v drugi polovici 17. stoletja ugotovila, da je mogoče ploščino med grafom dane funkcije (seveda ne čisto poljubne), osjo x in dvema vzporednicama z osjo y izračunati, če poznamo funkcijo $F(x)$, katere odvod je enak dani funkciji $f(x)$. Taki funkciji $F(x)$, za katero je

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

rečemo **primitivna funkcija** ali **nedoločeni integral** funkcije f. Hitro opazimo, da funkcija F pri dani funkciji f nikakor ni enolično določena, saj je za poljubno konstanto C

$$(F(x) + C)' = f(x)$$

in je torej $F(x) + C$ tudi primitivna funkcija funkcije f. Govorimo torej o celi družini primitivnih funkcij za dano funkcijo f. To pa so tudi vse funkcije z lastnostjo (1), saj iz $F' = G' = f$ sledi, da je$(F - G)' = 0$ in torej $F(x) = G(x) + C$ za neko konstanto C. Pišemo

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C.$$

Tak zapis je bolj razumljiv, če si predstavljamo integriranje kot obratno smer diferenciala. Namreč, če je

$$dF(x) = F'(x)\,dx,$$

bo integral "uničil"diferencial

$$\int dF(x) = F(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Če upoštevamo, da je odvod funkcije $x^2 = 2x$, bo

$$\int (2x)\,dx = x^2 + C,$$

saj za poljubno konstanto C velja $(x^2 + C)' = 2x$.

Iz definicije sledijo hitro naslednje lastnosti:

1. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ integriramo členoma
2. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ lahko izpostavimo konstanto k.

1.1.2 Integracijske metode

Najprej sestavimo tabelo nedoločenih integralov elementarnih funkcij, ki bo skoraj v obratni smeri napisana tabela odvodov.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$
4. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int \cosh x\ dx = \sinh x + C$
9. $\int \sinh x\ dx = \cosh x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Medtem, ko smo z nekaj pravili praktično znali odvajati vse elementarne funkcije, pa z integriranjem ne bo tako. Že za preproste funkcije se namreč izkaže, da se njihove primitivne funkcije ne izražajo z elementarnimi funkcijami. Take so npr.:

$$e^{-x^2},\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{\cos x}{x},\ \frac{e^x}{x}.$$

Uvedba nove spremenljivke

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt, \qquad \text{če je } t = g(x). \tag{2}$$

Zgled.

$$\begin{aligned} \int e^{x^2} x dx &= \\ t &= g(x) = x^2, \\ dt &= g'(x)\, dx = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

Torej je $\int e^{x^2} xdx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$. Novo spremenljivko t smo v tem primeru uvedli prav zato, ker je xdx do množilne konstante enak diferencialu $d(x^2)$.

Preverimo še formulo (2): Naj bo $F(t) = \int f(t)\,dt$, vemo pa, da je $F'(t) = f(t)$. Izračunajmo $\frac{d}{dx}\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x))\,g'(x)$ in $\frac{d}{dx}F(t) = \frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x)$. Tako smo ugotovili, da sta odvoda leve in desne strani enaka, torej se integrala razlikujeta kvečjemu za aditivno konstanto.

Integral tipa "števec je odvod imenovalca"

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

Zgledi:

1. $\int \tan x\; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \ln|\cos x| + C$
2. $\int \frac{xdx}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

"**Namesto x je linearna funkcija $ax+b$**"

$$\begin{aligned} \int f(ax+b) &= \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ če je} \\ \int f(x)\,dx &= F(x) + C. \end{aligned}$$

Ta lastnost je posledica uvedbe nove spremenljivke $t = ax + b$.

Zgledi:

1. $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$
2. $\int \cos 2x\; dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$
3. $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$

Integracija po delih (per partes)

$$\int u\; dv = uv - \int v\; du \tag{3}$$

To pravilo izhaja iz pravila za odvajanje produkta:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Pomnožimo z dx,

$$\begin{aligned} (uv)'\,dx &= u'dx\; v + u\; v'dx \\ d(uv) &= vdu + udv, \end{aligned}$$

integriramo

$$\begin{aligned} \int d(uv) &= \int v\; du + \int u\; dv \\ uv &= \int v\; du + \int u\; dv, \end{aligned}$$

od koder sledi željeni rezultat.

S pomočjo tega pravila bomo večinoma integrirali take produkte funkcij, kjer se en faktor z odvajanjem poenostavi, drugega pa je preprosto integrirati.

Zgled.

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= ?\\ u &= x, \quad dv = e^x dx\\ du &= u' dx = dx, \qquad v = \int dv = \int e^x dx = e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \int u dv\\ &= uv - \int v du\\ &= xe^x - \int e^x dx\\ &= xe^x - e^x\\ &= (x-1)\,e^x.\end{aligned}$$

Integrali racionalnih funkcij $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$,

Najprej ločimo dva primera:

a) stopnja $p \geq$ stopnja q; v tem primeru najprej ulomek zdelimo.

$\int \frac{2x^2-1}{x^2-1} dx = \int \frac{2\left(x^2-1\right)+2-1}{x^2-1} dx = \int 2 + \int \frac{dx}{x^2-1} = 2x + \int \frac{dx}{x^2-1}$.

Tako nam nasploh preostane še integracija polinoma (kar že znamo) in racionalne funkcije, katere števec je nižje stopnje kot imenovalec.

b) stopnja $p <$ stopnja q

Najprej razstavimo imenovalec do kvečjemu kvadratnih nerazcepnih faktorjev in uporabimo **razcep na parcialne ulomke**.

b.1) V imenovalci so **samo enostavni linearni faktorji** (na potenco 1):

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Konstanti A in B določimo tako, da bo zgornja enakost veljala za vse x, razen seveda za $x \in \{-1, 1\}$. Desno stran damo na skupni imenovalec in dobimo:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{(A+B)\,x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

Sistem $A+B=0$ in $A-B=1$ nam da $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{-1}{2}$ in integral se nato glasi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

b.2) Kvadratni nerazcepni faktor ax^2+bx+c (vendar na potenco 1) prinese v razcepu člen

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Npr.: $\int \frac{dx}{(x^2+1)x}=\int \frac{Ax+B}{x^2+1}dx+C\int \frac{dx}{x}$; konstante A, B in C je treba še določiti in izračunati integrale. Denimo, da je $f(x)=ax^2+bx+c$. Potem integral

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{Ax+B}{f(x)}dx$$

razcepimo na naslednji način

$$\int \frac{Ax+B}{f(x)}dx=D\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx+E\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

$\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}+\int \frac{-3}{x^2+4x+5}dx.$

Nadalje je

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}=\int \frac{dx}{(x+2)^2+1}=\arctan(x+2)+C.$$

b.) Če imamo faktorje na višjo potenco kot ena, uporabimo formulo **Ostrogradski**, ki jo bomo zapisali le za "dovolj splošen"posebni primer.

$$\begin{aligned}&\int \frac{p(x)}{(x-1)^k(x+2)^m(x^2+1)^n}dx=\\ &\qquad\frac{A(x)}{(x-1)^{k-1}(x+2)^{m-1}(x^2+1)^{n-1}}+\int \frac{C}{x-1}dx+\int \frac{D}{x+2}dx+\int \frac{Ex+F}{x^2+1}dx,\end{aligned}$$

pri tem je stopnja polinoma $A(x)$ z neznanimi koeficienti za 1 manjša kot stopnja imenovalca: torej $st\ A(x)=(k-1)+(m-1)+(n-1)-1$. Da določimo neznane koeficiente, je zgornjo enakost potrebno najprej odvajati!

Tako vidimo, da je mogoče vsem racionalnih funkcijam izračunati nedoločene integrale. V rezultatu pa lahko nastopajo edino racionalne funkcije, logaritemska in arctan.

Integrali iracionalnih funkcij

a) V integralu racionalno nastopajo koreni $\sqrt[p]{x}$, $\sqrt[q]{x}$,.... Z uvedbo nove spremenljivke $x = t^r$, kjer je r najmanjši skupni večkratnik korenskih eksponentov, prevedemo integral na integral racionalne funkcije.

b) $\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ uženemo z uvedbo $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$.

c) Za integral

$$\int \frac{p_n\left(x\right) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad p_n\left(x\right) \text{ je dani polinom stopnje } n,$$

uporabimo nastavek

$$\int \frac{p_n\left(x\right) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = A_{n-1}\left(x\right)\sqrt{ax^2+bx+c} + B\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

kjer je $A_{n-1}\left(x\right)$ polinom stopnje $n-1$ z neznanimi koeficienti, kar je skupaj $n+1$ neznank.

$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+1} + D\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Za izračun kostant A, B, C in D moramo zgornjo enakost najprej odvajati. Dobimo

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} &= \left(2Ax+B\right)\sqrt{x^2+1} + \frac{\left(Ax^2+Bx+C\right)2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{D}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\left(2Ax+B\right)\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\left(Ax^2+Bx+C\right)x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{D}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

S primerjanjem koeficientov pri istoležnih potencah izračunamo konstante A, B in C.

Integrali trigonometričnih funkcij

- $\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$; uporabimo trigonometrične formule:
  $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right)x - \cos\left(a+b\right)x\right)$
  $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(a+b\right)x + \sin\left(a-b\right)x\right)$
  $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a+b\right)x + \cos\left(a-b\right)x\right)$
  Zgled: $\int \sin 3x \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 7x + \sin\left(-x\right)\right) dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 7x}{7} + \cos x\right) + C$
- $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$; znižamo potence, pri tem pa ločimo dva primera:
  a) vsaj eden izmed m, n je LIH; uvedba nove spremenljivke sin ali cos
  $\int \sin^3 x \cos dx = \int \sin^3 x\left(\cos x dx\right) = \int \sin^3 x\, d\left(\sin x\right) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$
  b) oba, m in n sta SODA; uporabimo formuli $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
- $\int x^n \sin x\, dx$, $\int x^n \cos x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$, -> n krat zaporedoma integriramo po delih.
- $\int R\left(\tan x\right) dx$, kjer je R racionalna funkcija; uvedemo novo spremenljivko $t = \tan x$.
- $\int R\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right) dx$, kjer je R racionalna funkcija; uvedemo novo spremenljivko $t = \tan x$.

- $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, kjer je R racionalna funkcija; uvedemo novo spremenljivko $t = \tan\frac{x}{2}$.
- $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ se ne izražata z elementarnimi funkcijami.

Integrali eksponentnih funkcij

- $\int R(e^x)\, dx$, kjer je R "lepa"; uvedemo $t = e^x$, saj je $dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$.
- $\int x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}$, integriramo n-krat per partes
- $\int e^{ax} \sin bx\ dx$ ali $\int e^{ax} \cos bx\ dx$, integriramo 2 krat po delih in pridemo do enačbe za iskani integral.
- $\int \frac{e^x}{x}$, $\int e^{x^2} dx$ se ne izražata z elementarnimi funkcijami.

Integrali logaritemskih in inverznih trigonometričnih funkcij:

- $\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$, $\int f(\arcsin x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int f(\arctan x) \frac{dx}{1+x^2}$; te rešimo z uvedbo nove spremenljivke.
- $\int g(x) \ln x dx$, $\int g(x) \arcsin x dx$, $\int g(x) \arctan x dx$; integracija po delih, kjer se z odvajanjem funkcije $\ln x$, $\arcsin x$ in $\arctan x$ ipd. poenostavijo.
- $\int \frac{dx}{\ln x}$ se ne izraža z elementarnimi funkcijami.