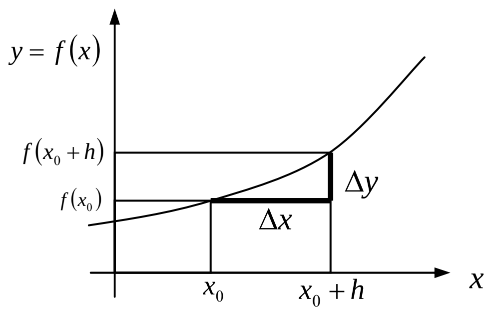
MATEMATIČNI UVOD

ODVOD

1. Diferenčni račun

Vzemimo funkcijo $y = f(x)$ in si poglejmo za koliko se spremeni vrednost funkcije, če se premaknemo po *x*-osi za *h* iz točke x_0.



Diferenčni količnik zapišemo kot:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (1)$$

Če ima diferenčni količnik (enačba 1) v točki x_0 limito, je funkcija $f(x)$ v tej točki odvedljiva.

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

Primer 1: $y = f(x) = 2x + 4$

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) + 4 - 2x - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \underline{\underline{2}}$$

Primer 2: $y = f(x) = x^2$

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = \underline{\underline{2x}}$$

2. Tabela elementarnih odvodov

funkcija f(x)	odvod funkcije $\frac{df(x)}{dx}$	primer
$f(x)=ax+b$	$\frac{df(x)}{dx}=a+0$	$s(t)=3t-2$ $\frac{ds(t)}{dt}=3$
$f(x)=ax^n+b$	$\frac{df(x)}{dx}=anx^{n-1}$	$g(z)=5z^4-3z^2+1$ $\frac{dg(z)}{dz}=20z^3-6z$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$\frac{df(x)}{dx}=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{3}{x}$ $\frac{df(x)}{dx}=-3x^{-2}=-\frac{3}{x^2}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$	$\frac{df(x)}{dx}=-nx^{-n-1}=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$v(t)=5\cdot\frac{1}{t^4}$ $\frac{dv(t)}{dt}=-20t^{-5}=-20\cdot\frac{1}{t^5}$
$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$v(h)=5\sqrt{h}$ $\frac{dv(h)}{dh}=\frac{5}{2}h^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2\sqrt{h}}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x)=5\cdot\sqrt[3]{x}=5x^{\frac{1}{3}}$ $\frac{df(x)}{dx}=\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{5}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$
$f(x)=a\cdot e^x$	$\frac{df(x)}{dx}=a\cdot e^x\cdot\ln e=ae^x$	$A(t)=3e^t$ $\frac{dA(t)}{dt}=3e^t$
$f(x)=a^x$	$\frac{df(x)}{dx}=a^x\cdot\ln a$	$f(x)=3^x$ $\frac{df(x)}{dx}=3^x\ln 3$
$f(x)=\ln x$	$\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{x}$	$g(j)=\ln(j)$ $\frac{dg(j)}{dj}=\frac{1}{j}$
$f(x)=\log_a x$	$\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln e}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$	$f(x)=\log x$ $\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{x\cdot\ln 10}$
$f(x)=\sin x$	$\frac{df(x)}{dx}=\cos x$	$y(t)=A\sin(t)$ $\frac{dy(t)}{dy}=A\cos(t)$

$f(x) = \cos x$	$\frac{df(x)}{dx} = -\sin x$	$s(t) = s_0 \cos(t)$ $\frac{ds(t)}{dt} = -s_0 \sin(t)$
$f(x) = \mathrm{tg}x$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(\alpha) = \mathrm{tg}\alpha$ $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
$f(x) = \mathrm{ctg}x$	$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$f(\varphi) = \mathrm{ctg}\varphi$ $\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{1}{\sin^2 \varphi}$

3 Tehnika odvajanja

3.1 Odvod poljubne elementarne funkcije:

Primer:

$$f(x)=e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\cdot\frac{d\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{dx}=e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\left(\sqrt{x}\right)}$$

3.2 Odvod produkta več funkcij:

$$y=f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}\cdot h(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot\frac{dh(x)}{dx}$$

Primer:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=x^2\\ g(x)&=e^{3x}\\ h(x)&=2\cdot\sin(5x)\end{aligned}\right\}\quad y=x^2\cdot e^{3x}\cdot 2\sin(5x)=2x^2e^{3x}\sin(5x)$$

$$\frac{dy}{dx}=2\cdot 2x\cdot e^{3x}\sin(5x)+2x^2\cdot e^{3x}\cdot 3\cdot\sin(5x)+2x^2\cdot e^{3x}\sin(5x)\cdot 5$$

3.3. Odvod ulomka:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}$$

Primer:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=\sin\left(3x^2-2x+1\right)\\ g(x)&=e^{3x}\end{aligned}\right\}\quad y(x)=\frac{\sin\left(3x^2-2x+1\right)}{e^{3x}}$$

$$\frac{y(x)}{dx}=\frac{\cos\left(3x^2-2x+1\right)(6x-2)e^{3x}-\sin\left(3x^2-2x+1\right)3e^{3x}}{\left(e^{3x}\right)^2}$$

4. Geometrijski pomen odvoda

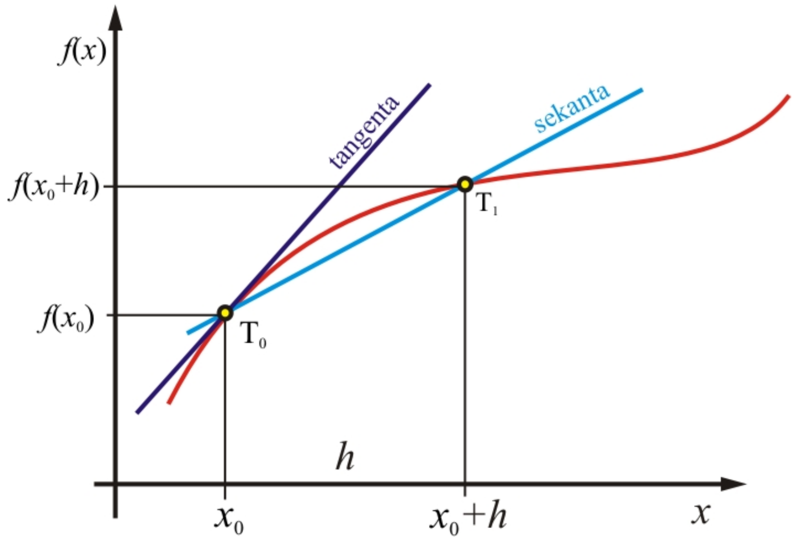
Vzemimo graf zvezne funkcije $f(x)$, ki je nepretrgana krivulja.

- Na krivulji izberimo točko $T_0(x_0, y_0)$, pri čemer je $y_0=f(x_0)$.
- Povečajmo neodvisno spremenljivko x za h. Novi vrednosti argumenta $x_1=x_0+h$ pripada točka $T_1(x_1, y_1)$, pri čemer je $y_1=f(x_0+h)$.
- Skozi točko T0 in T1 položimo sekanto, katere smerni koeficient je:

$$k_s = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

Če teži $h\to 0$, se točka T_1 približuje točki T_0. Sekanta pa se bliža končni legi, ki je tangenta na krivuljo $f(x)$ v točki T_0. Pri tem smerni koeficient sekante preide v smerni koeficient tangente:

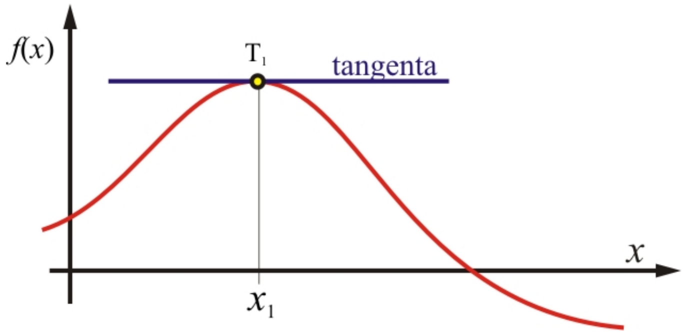
$$k_t = \lim \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{df(x)}{dx}. \tag{2}$$



Vrednost odvoda funkcije $f(x)$ v točki x_0 je smerni koeficient tangente na graf funkcije $f(x)$ v točki $T(x_0, f(x_0))$, ki je dotikališče tangente.

Primer 1: Funkcija $f(x)$ zavzema v pri vrednosti x_1 maksimalno vrednost (glej sliko). Tangenta v točki $T_1(x_1, f(x_1))$, je vodoravna premica, katere smerni koeficient $k_t=0$. V točki T_1 je torej:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx}=0}.$$



Primer 2: V kateri točki zavzema funkcija $y=x^2-4x+3$ ekstremno vrednost?

Funkcija y zavzema ekstremno vrednost, ko je $\boxed{\frac{dy}{dx}=0}$.

$$\frac{dy}{dx}=2x-4=0 \quad\Rightarrow\quad x=2\,.$$

Za vrednosti $x>2$ velja, da je $\frac{dy}{dx}>0$, kar pomeni, da vrednost funkcije z naraščanjem spremenljivke x narašča.

Za vrednosti $x<2$ pa je $\frac{dy}{dx}<0$, kar pomeni, da z manjšanjem spremenljivke x, vrednost funkcije y narašča.

Pri vrednosti x=2 je torej minimum funkcije $y=x^2-4x+3$.

Primer 3: Če vržemo kamen pod kotom φ z začetno hitrostjo v_0, ta leti po paraboli:

$$y(x)=\mathrm{tg}\varphi\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x^2\,.$$

Pri katerem x doseže kamen največjo višino?

Kamen doseže največjo višino pri maksimumu funkcije $y(x)$.
Za maksimalno vrednost funkcije velja:

$$\frac{dy(x)}{dx}=0\,.$$

V tem primeru je torej:

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{tg}\varphi-\frac{2g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{v_0^2\sin 2\varphi}{2g}\,.$$