3 Odvodi višjega reda in Taylorjev polinom

3.1 Odvodi višjega reda

Če je funkcija f odvedljiva na nekem intervalu, se pogosto zgodi, da je tudi dobljeni odvod f'odvedljiva funkcija in jo lahko še enkrat odvajamo. Tako dobimo odvod drugega reda. Podobno lahko dobimo odvode višjih redov: f'', f''' $f^{(4)}, ..., f^{(n)}, ...$

Induktivno lahko definiramo odvod n-tega reda kot

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(n+1)} &= \left(f^{(n)}\right)', \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Drug zapis odvoda reda n, ki se tudi uporablja: $\frac{d^n f}{dx^n} := f^{(n)}$.

Zgled: $f(x) = e^{2x}$, $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}, \ldots, f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$

Rečemo, da je funkcija **n-krat zvezno odvedljiva**, če so vse funkcije $f, f', \ldots f^{(n)}$ zvezne.

Označbe:

$$\begin{aligned} C(a,b) &= \{f;\ f \text{ je zvezna na } (a,b)\} \\ C[a,b] &= \{f;\ f \text{ je zvezna na} [a,b]\} \\ C^1(a,b) &= \{f;\ f \text{ je zvezno odvedljiva na } (a,b)\} \\ C^n(a,b) &= \{f;\ f \text{ je } n\text{-krat zvezno odvedljiva na } (a,b)\},\quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Seveda velja:

$$\ldots C^n(a,b) \subseteq C^{n-1}(a,b) \subseteq \ldots \subseteq C^1(a,b) \subseteq C(a,b).$$

3.2 Taylorjev polinom

Pri aproksimaciji z diferencialom smo dano funkcijo v okolici neke točke aproksimirali z linearno funkcijo. Kaj pa če bi namesto linearne poiskali kvadratično ali kubično, skratka polinomsko funkcijo, ki bi (lokalno, v neki okolici dane točke) "dobro"aproksimirala dano funkcijo.

Rečemo, da imata funkciji f in g v točki a **dotik reda** n, če je $f(a) = g(a)$ in se v tej točki ujemajo tudi vrednosti vseh odvodov do vključno reda n:

$$f'(a) = g'(a), f''(a) = g''(a), \ldots, f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a).$$

Izrek 3.1. ***(Taylor)*** *Funkcija f naj bo n-krat zvezno odvedljiva na intervalu $[a,x]$ in $(n+1)$-krat odvedljiva na (a,x). Potem obstaja število $\xi \in (a,x)$, za katerega je*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x,\xi),$$

polinom stopnje n

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)
\end{aligned}$$

se imenuje ***Taylorjev polinom****, izraz*

$$R_n(x,\xi) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a,x) \text{ ali } \xi \in (x,a),$$

pa ***ostanek*** *in predstavlja napako aproksimacije.*

Različica zapisa:
$x - a = h, \quad x = a + h$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(h,\theta)$$

$$R_n(h,\theta) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Primer: $f(x) = e^x$, $a = 0$.
$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(0) = 1$ za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$. Potem je

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x,\xi) \\
R_n(x,\xi) &= \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^n, \quad 0 < \xi < x
\end{aligned}$$

Če bi iskali recimo približek za vrednost $e^{0.2}$, $n = 3$, bi lahko napravili oceno napake:

$$0 < \xi < 0,2; \quad \text{zelo groba ocena: } e^\xi < 2$$

Potem je $R_3(x,\xi) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^3 < \frac{2}{4!} (0,2)^3 \doteq 6.7 \times 10^{-4}$.

Dokaz Taylorjevega izreka. Naj bo $g(x) = (x-a)^{n+1}$. Za pare funkcij $(f,g), (f',g') \ldots, \left(f^{(n)}, g^{(n)}\right)$ bomo večkrat zaporedoma uporabili Cauchyjev izrek, pri tem pa bomo upoštevali, da je

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a), \; k = 1, 2, \ldots, n$$

in so vsi odvodi $f^{(k)}, g^{(k)}, k = 1, 2, \ldots, n$, zvezne funkcije na $[a,x]$.

Pišimo na kratko $R(x) = f(x) - P_n(x)$. Gotovo je

$$R^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - P_n^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

in
$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 = f^{n+1}(x).$$
Potem po C. izreku najprej obstaja taka točka $x_1 \in (a, x)$, da je

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R(x) - \overbrace{R(a)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{R'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Podobno je za neki $x_2 \in (a, x_1)$ izpolnjeno $\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R''(x_2)}{g''(x_2)}$. Nadaljujemo in dobimo

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R'(x_1)}{g'(x_1)} = \ldots = \frac{R^{(n)}(x_n)}{g^{(n)}(x_n)} = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}, \qquad \xi \in (a, x_n) \subseteq (a, x).$$

Ker je $g(x) = (x-a)^{n+1}$, je $g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ in

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

od koder sledi
$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$