1. OSNOVE MATEMATIČNE LOGIKE
1.1. IZJAVNI RAČUN

Logika proučuje tiste oblike mišljenja, ki nas od znanih dejstev vodijo do novih spoznanj.
Tem miselnim procesom pravimo *sklepanje.*

Zgleda:

Vsi ljudje so smrtni.	Vsi otroci radi jedo sadje.
Sokrat je človek.	Janezek je otrok.
Sokrat je smrten.	Janezek rad je sadje.

Za logiko je zanimivo tisto, kar je obema zgledoma skupno. To lahko formaliziramo:

Vsak A ima lastnost B.
C je eden izmed A.
C ima lastnost B.

Osnovni gradniki matematične logike so izjave.

Definicija. ***Izjava*** *je vsak stavek, ki je bodisi pravilen (resničen) bodisi nepravilen (lažen, neresničen).*

Ali so naslednji stavki izjave?
- Sheakepeare je napisal Hamleta.
- Simon Jenko je napisal Sonetni venec.
- Zemlja je edini planet v vesolju, na katerem je življenje.

Obiskovalec galerije izjavi:
- Ta slika je lepa.
- Za vsako naravno število n obstaja praštevilo p, ki je večje od n.
- Kupi vstopnico za koncert!

Izjave bomo označevali: A, B, $C, \ldots$, ali A_1, A_2, $\ldots$

Naloga logike je, da proučuje zveze med izjavami. Izjave, ki so sestavljene iz več delnih izjav, so **sestavljene** (povezane) izjave, sicer so **enostavne** izjave. Izjava ima **logično vrednost P**, če je resnična in logično vrednost **N**, če je lažna.

Definicija. ***Negacija*** *izjave A je izjava $\neg A$, ki je pravilna, če je A nepravilna in je nepravilna, če je A pravilna. (izjavo $\neg A$ preberemo "ne A".*

Zgled:
izjava A : Andrej dobi vespo.
izjava $\neg A$: Andrej ne dobi vespe.
varianta: Ni res, da dobi Andrej vespo.
Pravilnostna tabela:

A	$\neg A$
N	P
P	N

Definicija. ***Konjunkcija*** *izjav A in B (oznaka $A \wedge B$) je izjava, ki je pravilna, kadar sta obe izjavi pravilni in nepravilna, če je vsaj ena od izjav A, B nepravilna. Izjavo $A \wedge B$ preberemo tudi "A in (hkrati) B".*

Zgled:
izjava A : Dežuje.
izjava B : Sije sonce.
izjava $A \wedge B$: Dežuje in sije sonce.

Pravilnostna tabela:

A	B	$A \wedge B$
N	N	N
N	P	N
P	N	N
P	P	P

Definicija. ***Disjunkcija*** *izjav A in B (oznaka $A \vee B$) je izjava, ki je pravilna, kadar je vsaj ena od izjav A, B pravilna, in nepravilna, če sta obe izjavi nepravilni. Izjavo $A \vee B$ preberemo tudi "A ali B".*

Zgled:
Dežuje ali sije sonce.

Pravilnostna tabela:

A	B	$A \vee B$
N	N	N
N	P	P
P	N	P
P	P	P

Definicija. ***Implikacija*** *izjav A in B (oznaka $A \Rightarrow B$) je izjava, ki je nepravilna v primeru, ko je A pravilna, B pa nepravilna, in pravilna v vseh ostalih primerih. Izgovarjamo: "Če A potem B".*

Zgled:
izjava A: Dežuje.
izjava B: Ceste so mokre.
izjava $A \Rightarrow B$: Če dežuje, so ceste mokre.
izjava $B \Rightarrow A$: Če so ceste mokre, dežuje.
Očitno imata izjavi $A \Rightarrow B$ in $B \Rightarrow A$ različen pomen.

Pravilnostna tabela:

A	B	$A \Rightarrow B$
N	N	P
N	P	P
P	N	N
P	P	P

Še nekaj zgledov:
Mislim, torej sem.
Kadar mačke ni doma, miši plešejo.
Naredil bo izpit, če se bo dovolj učil.

Definicija. ***Ekvivalenca*** *izjav A in B je izjava $A \Longleftrightarrow B$, ki je pravilna, če sta pravilni A in B ali če sta obe, A in B, nepravilni. V vseh ostalih primerih je nepravilna. (Izgovorjava: "A natanko tedaj kot B" , "A tedaj in le tedaj kot B", "A če in samo če B")*

Zgled:
izjava A: Andrej dobi vespo.
izjava B : Andrej naredi maturo.
izjava $A \Longleftrightarrow B$: Andrej dobi vespo tedaj in le tedaj ko naredi maturo.

Pravilnostna tabela:

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
N	N	P
N	P	N
P	N	N
P	P	P

SESTAVLJENE IZJAVE:

$$\text{a)}\ A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$\text{b)}\ A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \vee B$$

Kdaj potrebujemo oklepaje?
Dogovor o prioriteti operacij: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
S pravilnostno tabelo se lahko prepričamo, da je zgornja izjava pravilna neodvisno od vrednosti izjav A in B.

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg A \vee B$	$\overset{a)}{\Leftrightarrow}$	$\overset{b)}{\Leftrightarrow}$
N	N						
N	P						
P	N						
P	P						

Izjavo $A \Rightarrow B$ lahko izrazimo tudi v oblikah:
A je **zadostni pogoj** za B.
B je **potrebni pogoj** za A.

Izjavo, ki je zmeraj pravilna, neodvisno od vrednosti izjav, ki v njej nastopajo, imenujemo **RESNICA** ali **TAVTOLOGIJA**.
Izjavo, ki pri nobenem naboru vrednosti izjav osnovnih izjav ni pravilna, imenujemo **PROTISLOVJE** ali **LAŽ**.

$A \wedge \neg A$

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
N	P	N
P	N	N

NEKAJ POMEMBNIH LOGIČNIH EKVIVALENC:

$\neg(\neg A) \iff A$ zakon negacije negacije
$A \wedge B \iff B \wedge A$ komutativnost konjunkcije
$(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C) \iff A \wedge B \wedge C$ asociativnost konjunkcije
$A \vee B \iff B \vee A$ komutativnost disjunkcije
$(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C) \iff A \vee B \vee C$ asociativnost disjunkcije
$A \wedge A \iff A \iff A \vee A$ idempotentnost konjunkcije in disjunkcije
$(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ distributivnost
$(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
De Morganova zakona:
$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$ negacija konjunkcije
$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$ negacija disjunkcije
O implikaciji:
$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$ zakon kontrapozicije
$A \Rightarrow B \iff \neg A \vee B$ omogoča zanikati implikacijo
O ekvivalenci:
$(A \iff B) \iff (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

IZJAVE S KVANTIFIKATORJI

Kvantifikatorji povedo za koliko objektov iz nekega področja izjava velja.
Uporabljali bomo naslednje oznake:
$\forall$ . . .za vsak
$\exists$ . . .obstaja (s tujko: eksistira)
$\exists!$ . . .obstaja natanko eden.
Zgledi:
$\forall x \quad A(x)$ . . .za vsak x velja izjava $A(x)$.
$\forall n \quad n$ je naravno število in n je deljiv z 2.
$\exists n \quad n$ je naravno število in n je deljiv z 2.
$\exists! n \quad n$ je najmanjše naravno število.

Negacija izjav s kvantifikatorji

$\neg\,(\forall x)\, A\,(x) \Longleftrightarrow \exists x\, \neg A\,(x)$

Ni res, da je vsak državljan Slovenije rjavolas.
Ekvivalentno je: Obstaja vsaj en državljan Slovenije, ki ni rjavolas.

$\neg\,(\exists x)\, A\,(x) \Longleftrightarrow \forall x\, \neg A\,(x)$

Ni res, da obstaja v škatli rdeča kroglica.
Ekvivalentno: Za vse kroglice v škatli velja, da niso rdeče.

Ali je pravilna izjava $\exists x \quad x \in \mathbb{R}$ in $\frac{1}{1+x^2} > 1$?

$\forall x \in \mathbb{R} \;\; x^2 \geq 0$
$\forall x \in \mathbb{R} \;\; x^2 + 1 \geq 1$
$\forall x \in \mathbb{R} \;\; 1 \geq \frac{1}{1+x^2}$
$\forall x \in \mathbb{R}\, \neg \left(\frac{1}{1+x^2} > 1 \right)$
$\neg \quad (\exists x \in \mathbb{R})\, \frac{1}{1+x^2} > 1$

Pravila dokazovanja:

1. Direktni dokaz.

Dokazujemo izjavo tipa $A \Rightarrow B$. Predpostavimo torej, da je A pravilna in direktno izpeljemo veljavnost B.

Zgled:

Če je n liho naravno število, je tudi n^2 liho število.

2. Indirektni dokaz.

Dokazujemo izjavo tipa $A \Rightarrow B$, vendar se izkaže ugodneje (odvisno od primera do primera) direktno dokazovati ekvivalentno trditev $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Zgled:

Če je n^2 sodo število, je n sodo število.

3. Dokaz s protislovjem.

Želimo dokazati izjavo A. Predpostavimo, da je A nepravilna in pokažemo, da vodi ta predpostavka v protislovje. S tem smo pokazali pravilnost izjave $\neg A \Rightarrow N$. Ta je pravilna le, če je $\neg A$ nepravilna, torej je A pravilna.

Zgled:
Število $\sqrt{2}$ ni ulomek.