3 Osnove teorije grafov

3.1 Osnovne definicije

Graf G je določen z množico točk $V(G)$ in seznamom (ali množico) povezav $E(G)$. Na kratko bomo pisali tudi V in E.

Vsaka povezava je določena s svojima krajiščema. Med povezavama uv in vu ne razlikujemo, kadar se ukvarjamo z neusmerjenimi grafi.

Posebni grafi:

ničelni graf N_n, polni graf K_n, dvodelni grafi, Dvodelni polni graf $K_{m,n}$, grafi kocke Q_n, $n = 0, 2, \ldots$

Stopnja točke je enaka vsoti števila povezav, ki imajo to točko za krajišče in dvojnega števila zank v tej točki. Pisali bomo $\mathrm{st}(v)$ ali tudi $\deg(v)$.

Lema 3.1 ***(Lema o rokovanju)*** *Vsota stopenj vseh točk je enaka dvojnemu številu vseh povezav v grafu.*

Posledica 3.2 ***Posledice leme o rokovanju:***

1. *Število vseh točk lihe stopnje v grafu je sodo.*
2. $\min\limits_{1\le i\le n} deg\, v_i \le \frac{2m}{n} \le \max\limits_{1\le i\le n} \deg v_i$, *kjer je m število povezav v grafu in n število vseh točk v grafu.*

3.2 Sprehodi in obhodi

Sprehod (dolžine k) je niz k povezav v grafu

$$(u,x)\,(x,y)\ldots(t,z)\,(z,w)$$

Temu sprehodu lahko rečemo tudi sprehod med točkama u in w. Povezave niso usmerjene, zato predstavlja niz

$$(w,z)\,(z,t)\ldots(y,x)\,(x,u)$$

isti sprehod. Pogosto sprehod opišemo samo z zaporedjem točk na danem nizu povezav.

$$u\ x\ y\ \ldots t\ z\ w$$

Obhod (ali sklenjeni sprehod) je tak sprehod $u\ x\ y\ \ldots t\ z\ w$ kjer začetna točka u in končna točka w sovpadata.

Enostavni sprehod je sprehod, v katerem nobena povezava ne nastopi dva ali večkrat. Točke pa se lahko ponovijo.

Enostavni obhod je sklenjen enostavni sprehod.

Pot je enostavni sprehod, v katerem se niti točke, niti povezave ne ponovijo.

Graf, ki predstavlja le pot na n točkah označimo s P_n.

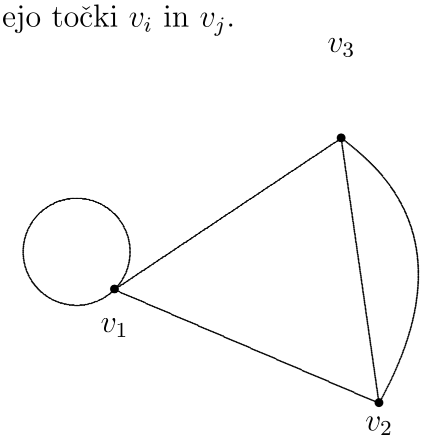
Cikel je sklenjen enostavni sprehod. Cikel na n točkah označimo s C_n.

Trditev 3.3 *Če med dvema točkama grafa obstaja sprehod, obstaja tudi pot.*

Graf je **povezan,** če med poljubnima točkama grafa obstaja vsaj ena pot.

3.2.1 Matrika sosednosti in incidenčna matrika

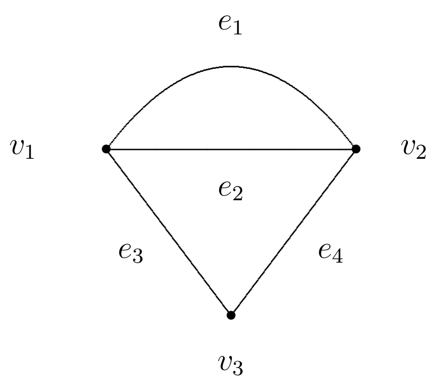
Naj bo G graf z n točkami $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$. **Matrika sosednosti $\mathbf{M}(\mathbf{G})$** je matrika velikosti $n \times n$, v kateri element v j-tem stolpcu i-te vrstice pove število povezav, ki povezujejo točki v_i in v_j.



$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$M(G)$ je simetrična glede na glavno diagonalo.

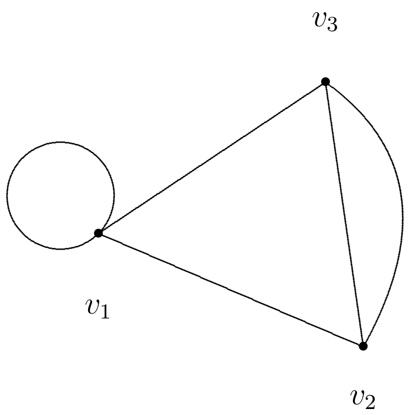
Naj bodo $e_1, e_2, \ldots, e_m$ povezave grafa z n točkami $v_1, v_2, \ldots, v_n$. **Incidenčna matrika $\mathbf{I}(\mathbf{G})$** je matrika velikosti $n \times m$, katere element v i-ti vrstici in j-tem stolpcu je enak 1, če je točka v_i krajišče povezave e_j. V nasprotnem primeru je vrednost tega elementa enaka 0.

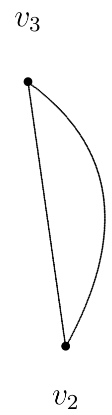


$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.2 Novi grafi iz starih grafov

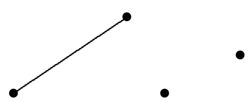
G naj bo graf z množico točk $V(G)$ in seznamom povezav $E(G)$. Graf G' je **podgraf** grafa G, če je $V(G') \subseteq V(G)$ in $E(G') \subseteq E(G)$.





graf G podgraf G'

Naj bosta G_1 in G_2 taka grafa, da je $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. **Unija** grafov G_1 in G_2 je graf G, za katerega velja $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ in $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

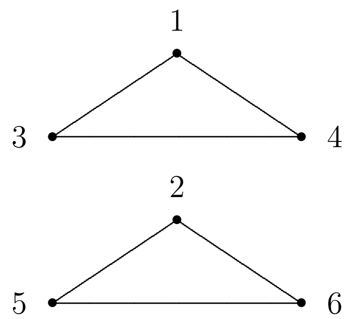


$K_2 \cup N_2$

$K_2 \cup N_1 \cup N_1$

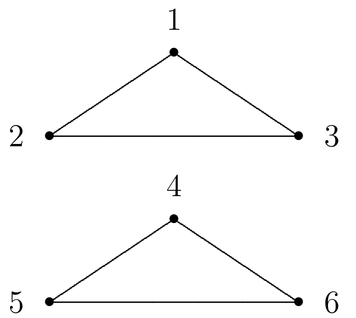
Nepovezani graf razpade na unijo nekaj povezanih podgrafov, ki jih imenujemo **povezane komponente.** Povezana komponenta grafa G ni (pravi) podgraf nobenega povezanega podgrafa grafa G.

$$M(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$V(G_1) = \{1, 3, 4\}$
$V(G_2) = \{2, 5, 6\}$

Če točke grafa preimenujem, lahko dosežem, da bo matrika sosednosti bločno diagonalna.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 Drevesa

Definicija 3.4 ***Drevo*** *je povezan acikličen graf.*

Očitno je drevo zmeraj enostaven graf, kajti, če bi imel zanko ali kako dvojno povezavo, bi takoj imel cikel.

Lema 3.5 *Povezani graf, v katerem je povezav manj kot točk, ima vsaj eno točko stopnje 1.*

Dokaz. Naj ima graf n točk in $m < n$ povezav. Potem je po posledici Leme o rokovanju

$$\begin{aligned} n \min_i \deg v_i &\leq 2m \\ \min_i \deg v_i &\leq \frac{2m}{n} < 2 \end{aligned}$$

Torej je točka minimalne stopnje bodisi s stopnjo 0 ali 1. Ker je graf povezan, nima točk stopnje 0.

IZREK. Naslednje trditve so med seboj ekvivalentne.
(a) D je drevo.
(b) Med poljubnima točkama grafa D je natanko ena pot.
(c) Graf D je povezan in vsaka povezava je most.
(d) D je povezan graf z n točkami in $n-1$ povezavami.

Dokaz poteka v obliki ekvivalenčnega kroga: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.
$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ očitno.
$(c) \Rightarrow (d)$ Indukcija. Za $n = 1, 2$ trditev očitno velja. Denimo, da za povezane grafe s kvečjemu $k \leq n$ točkami, kjer je vsaka povezava most, že velja, da imajo $k - 1$ povezav. Naj bo D_{n+1} povezan graf na $n + 1$ točkah, kjer je vsaka povezava most. Odstranimo poljubno povezavo. Na ta način smo dobili dva povezana podgrafa grafa D_{n+1}, ki pa

imata vsak kvečjemu n točk. Denimo, da ima eden n_1 točk, drugi pa n_2, pri čemer je seveda $n_1 + n_2 = n + 1$. Oba tudi izpolnjujeta pogoj, da je vsaka povezava most. Po indukcijski predpostavki ima prvi $n_1 - 1$ povezav, drugi $n_2 - 1$; tako ima graf D_{n+1} natanko $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n$ povezav.

$(d) \Rightarrow (a)$ Indukcija. Za $n = 1, 2$ trditev očitno velja. Naj bo D_{n+1} povezan graf z $n + 1$ točkami in n povezavami. V njem obstaja točka stopnje 1, imenujmo jo v. Iz grafa odstranimo to točko in povezavo vw. Tako smo dobili nov povezan graf na n točkah z $n - 1$ povezavami. Po indukcijski predpostavki, je ta graf acikličen. Točka v gotovo ne leži na ciklu, torej je tudi graf D_{n+1} acikličen in tako drevo.

3.4 Eulerjevi grafi

3.5 Hamiltonovi grafi

3.6 Ravninski grafi