1.3 Posplošeni ali izlimitirani integral

1. Ena **meja** (ali obe) je **neskončno**:

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

   Če obstaja ustrezna limita, rečemo, da integral **konvergira**.

2. Podintegralska funkcija ima na **eni od mej** (ali tudi obeh) **singularnost**:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx, \quad \text{če ima } f \text{ singularnost na spodnji meji,} \\
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \text{če ima } f \text{ singularnost na zgornji meji.}
\end{aligned}$$

3. Če ima f **singularnost** v **notranji točki** c integracijskega intervala:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

   Pri tem poudarimo, da morata obstajati oba integrala na desni strani.

   Cauchyjeva glavna vrednost:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right)$$

   Možno je, da kateri od integralov $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ ne konvergira, obstaja pa Cauchyjeva glavna vrednost.
   Primer:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln|-\varepsilon|) + \lim_{\varepsilon\to 0+}(-\ln|\varepsilon|)
\end{aligned}$$

Posamezni limiti ne obstajata, medtem ko je Cauchyjeva glavna vrednost

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_\varepsilon^b\frac{dx}{x}\right) &= \\
\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln|-\varepsilon|-\ln|\varepsilon|\right) &= 0
\end{aligned}
$$

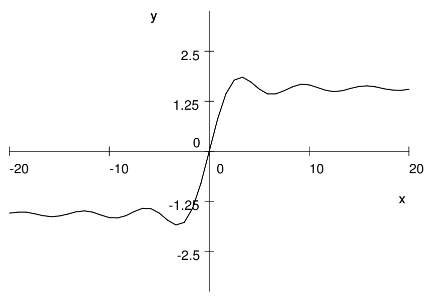
definirana.

1.3.1 Funkcije, definirane z integralom

1. **Integralski sinus**

$$\mathrm{Si}\,(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$$

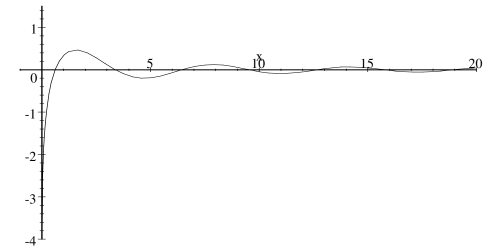
definicijsko območje: $\mathbb{R}$
$\lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}\,(x)=\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$
parnost: $\mathrm{Si}\,(-x)=-\,\mathrm{Si}\,(x)$
$\mathrm{Si}'\,(x)=\frac{\sin x}{x}$,
Ker je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, je Si odvedljiva funkcija, torej je zvezna.
Ekstremi: $\mathrm{Si}'\,(x)=0\Rightarrow\sin x=0,\ x\neq 0,\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\diagdown\{0\}$
$\mathrm{Si}''\,(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},\quad \mathrm{Si}''\,(k\pi)=\frac{\cos(k\pi)}{k\pi}=\frac{(-1)^k}{k\pi}\Rightarrow$
izmenično minimumi in maksimumi, $k=1$ je maksimum



graf funkcije Si(x)

2. **Integralski kosinus**

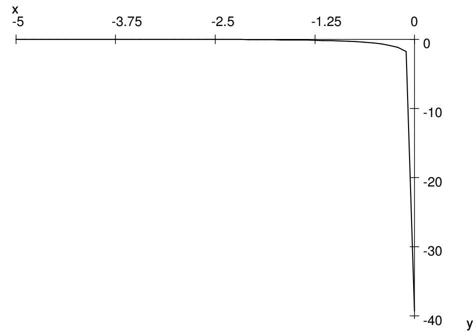
$$\mathrm{Ci}\,(x)=\int\limits_x^\infty\frac{\cos x}{x}dx$$



graf funkcije Ci(x)

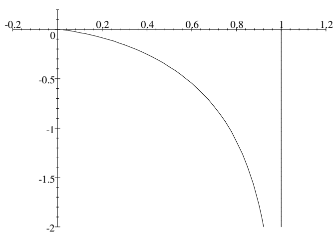
3. **Integralska eksponentna funkcija**

$$\mathrm{Ei}\,(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt, \quad \text{definirana le za } x < 0$$



graf funkcije Ei(x)

4. **Integralski logaritem** $li\,(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} = \mathrm{Ei}\,(\ln x)$



graf funkcije $li(x)$