PRESLIKAVE

Naj bosta A in B dani množici.

Definicija. *$\textbf{Funkcija}$ (ali $\textbf{preslikava}$) je predpis, ki vsakemu elementu x množice A priredi natanko določeni element $y \in B$.*

Zapis: $\begin{array}{l} f : A \to B \\ x \mapsto y \end{array}$ ali $\begin{array}{l} f : A \to B \\ y = f(x) \end{array}$

Elementom $x \in A$ rečemo **originali**, medtem ko so $y \in B$, $y = f(x)$, njihove **slike**. Množico A imenujemo **domena,** množico B pa **kodomena** funkcije f.

Zgled:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

$$\begin{array}{ll} f : A \to B & \qquad g : A \to B \\ \quad 1 \mapsto a & \qquad\quad 1 \mapsto a \\ \quad 2 \mapsto b & \qquad\quad 2 \mapsto a \\ \quad 3 \mapsto a & \qquad\quad 3 \mapsto a \end{array}$$

Naj bo $C \subseteq A$. **Slika** $f(C)$ množice C je množica vseh slik originalov iz množice C. Množico $f(A)$ imenujemo **zaloga vrednosti** funkcije f. Seveda je $f(A) \subseteq B$. Alternativni oznaki za zalogo vrednosti sta še Z_f in R_f.

$$\begin{array}{l} f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{e, f, g, h\} \\ \qquad\qquad 1 \mapsto g \\ \qquad\qquad 2 \mapsto h \\ \qquad\qquad 3 \mapsto g \\ \qquad\qquad 4 \mapsto f \end{array}$$

$Z_f = \{f, g, h\}$
je prava podmnožica $\{e, f, g, h\}$

Definicija. *Če je $f(A) = B$, rečemo, da je f $\textbf{surjektivna}$ ali $\textbf{surjekcija}$. V tem primeru za vsak element $y \in B$ najdemo tak $x \in A$, da je $f(x) = y$.*

Preslikava $f : A \to B$ je $\textbf{injektiva}$ ali $\textbf{injekcija}$, če se katerakoli različna originala x_1, x_2 preslikata v različni sliki $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Torej: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ekvivalentno: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Definicija. *Preslikava, ki je injektivna in surjektivna, je $\textbf{bijektivna}$ ali $\textbf{bijekcija}$ (rečemo tudi $\textbf{povratno enolična}$).*

Za vsako bijektivno preslikavo $f : A \to B$ obstaja **inverzna** funkcija $f^{-1} : B \to A$. To je funkcija, ki preslika y v x, če je f preslikala x v y.

$$\begin{array}{ll} f : A \to B & \qquad f^{-1} : B \to A \\ \quad x \mapsto y & \qquad\quad y \mapsto x \end{array}$$

Zakaj potrebujemo bijektivnost za vpeljavo inverzne funkcije?

Surjektivnost potrebujemo zato, da bomo za vsak element množice B vedeli, kam ga z f^{-1} preslikati. Če je f surjektivna, je vsak element množice B slika **vsaj** enega x.

Če funkcija ne bi bila injektivna, bi lahko bil kakšen y slika dveh ali več različnih x-ov. Zaradi injektivnosti pa se s fukcijo f v vsak y preslika **natanko en** x.

Definicija. *Množici sta* **ekvipolentni** *(ali* **enako močni***), če med njima obstaja kakšna bijekcija.*

Če sta množici, katerih elemente lahko preštejemo ekvipolentni, imata enako število elementov.

Komponiranje ali sestavljanje funkcij

Bodita: $\quad f : A \to B \quad in \quad g : B \to C \quad$ dani funkciji.

Konstruirajmo novo funkcijo $g \circ f : A \to C$, ki bo delovala isto kot f in g druga za drugo. Torej

$$\begin{array}{c} g \circ f : A \to C \\ x \overset{f}{\mapsto} y \overset{g}{\mapsto} z \end{array} \qquad z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Nasploh $g \circ f \neq f \circ g$.

Označimo $\mathbf{i}_A : A \to A$ preslikavo na poljubni množici A, ki vsak element $x \in A$ preslika **vase.** To preslikavo imenujemo **identična preslikava** ali **identiteta**.

Če je $f : A \to B$ bijekcija, je bijekcija tudi $f^{-1} : B \to A$ in velja:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} \circ f : A \to A & & f \circ f^{-1} : B \to B \\ f^{-1} \circ f = i_A & \text{in} & f \circ f^{-1} = i_B \\ f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A & & f\left(f^{-1}(y)\right) = y \quad \forall y \in B \end{array}$$

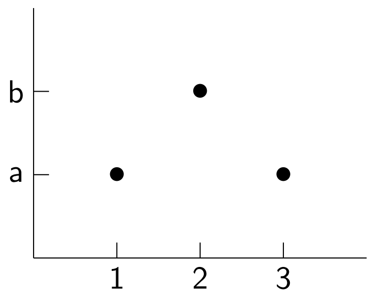
Omenimo še pojem **graf** funkcije $f : A \to B$. To je množica

$$G_f = \{(x, y)\,;\ x \in A\ in\ y = f(x)\}$$

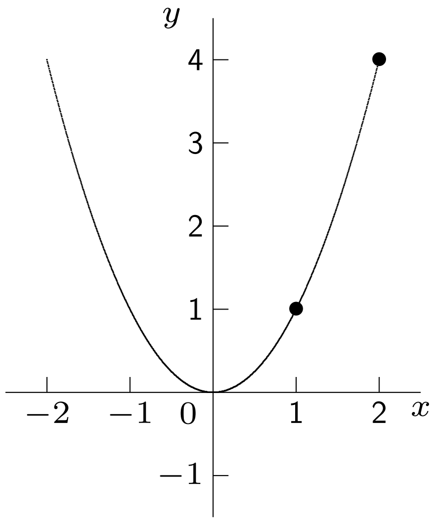
Vidimo, da je $G_f \subseteq A \times B$.

Če je $f : A \to B, \quad A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b\}$

$$\begin{array}{l} f : A \to B \\ \quad 1 \mapsto a \\ \quad 2 \mapsto b \\ \quad 3 \mapsto a \end{array} \quad , \quad \text{je } G_f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$$



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad G_f = \{\,(x, x^2)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$y = x^2$$



Točke $(1,1)$, $(2,4)$ pa tudi $(-3,9)$ ležijo na grafu te funkcije.