1.2 Riemannov (določeni) integral

1.2.1 Motivacija

Problem, ki je povzročil razvoj integrala, je izračun ploščine lika, ki ga omejuje ena ali več krivulj.

Denimo, da imamo na intervalu $[a, b]$ dano zvezno nenegativno funkcijo $x \mapsto f(x)$. Želimo izračunati ploščino lika p med grafom funkcije f, osjo x in premicama $x = a$ in $x = b$. Intuitivno se zadeve lotimo takole: interval $[a, b]$ razdelimo na n podintervalov, to delitev določajo točke

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Na vsakem izmed podintervalov $[x_i, x_{i+1}]$ izberimo še točko t_i. Označimo še $\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$. Nato je ploščina i-tega pravokotnika $f(t_i)\Delta x_i := \Delta p_i$ približek za ploščino i-tega "traku", iz katerih je sestavljen celotni lik. Če ploščine teh pravokotnikov seštejemo, dobimo

$$p \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

Videti je, da se bomo tembolj približali natančni ploščini, čim večji bomo izbrali n.

Pojavijo se naslednja vprašanja:

1. Kako ploščino natančno definirati?
2. Za kakšen razred funkcij ima ploščina smisel?
3. Kako jo izračunati?

Na vsa ta vprašanja bomo odgovorili v naslednjem poglavju. Vrednost integrala, kot ga bomo definirali, pa bo prav ploščina p.

1.2.2 Riemannova vsota in integrabilnost

Pri dani funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ izberimo delitev intervala $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ in množico točk $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ z lastnostjo $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$. Označimo maksimalno širino podintervalov z $\Delta = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$. Intuitivno je jasno, da bo treba izbirati take delitve intervala, da bo Δ čim manjša (posledično bo n velik, obratno pa ne bi bilo nujno res). Ob izbrani delitvi D in točkah T označimo z $S_{D,T}$ naslednjo vsoto

$$S_{D,T} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

Tej vsoti pravimo **Riemannova vsota**.

Definicija 1.1. ***(Riemannov ali določeni integral)***
Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je ***v Riemannovem smislu integrabilna****, ali na kratko* ***integrabilna****, če obstaja tako število L, da je razlika $|S_{D,T} - L|$ poljubno majhna, če je le Δ dovolj majhna.*

$$\forall\varepsilon > 0 \textit{ obstaja tak } \delta > 0, \textit{ da velja} : \Delta < \delta \Rightarrow |S_{D,T} - L| < \varepsilon.$$

Številu L s to lastnostjo rečemo ***Riemannov ali določeni integral*** *funkcije f na intervalu $[a, b]$ in ga označimo*

$$L = \int_a^b f$$

ali tudi

$$L = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Število L je torej integral funkcije f, če se z izbiro dovolj fine delitve Riemannova vsota številu L približa na poljubno vnaprej izbrano natančnost.Včasih uporabimo tudi zapis

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta x_i,$$

pri čemer pa se je treba zavedati, da je ta limita nasploh zelo zapletena in je praviloma ne bomo uporabljali za izračun določenega integrala. Vendar pa se pri praktičnih primerih pogosto zelo naravno pojavijo Riemannove vsote in to nas potem pripelje do uporabe integrala.

Poleg Riemannovega integrala obstajajo tudi drugi integrali, ki so posplošitve Riemannovega, npr.: Riemann-Stieltjesov in Lebesgueov integral.

Iz definicije integrala in lastnosti limite takoj sledijo naslednje **lastnosti določenega integrala.** Predpostavimo, da sta f in g integrabilni na intervalu $[a, b]$ in je k konstanta. Potem so kf, $|f|$ in $f + g$ integrabilne funkcije in velja

1. $\int_a^b kf = k \int_a^b f$
2. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
3. $\int_a^b f \le \int_a^b g$, če je za vsak $x \in [a, b] : f(x) \le g(x)$
4. $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \le M(b - a)$, če je $|f(x)| \le M$ za vsak $x \in [a, b]$.
5. $\int_a^b 1 = b - a$.

Brez dokaza navedimo še nekaj **zadostnih pogojev za R. integrabilnost** funkcije.

1. Če je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$, je v Riemannovem smislu integrabilna.

2. Če je funkcija f na $[a, b]$ monotona, je integrabilna.
3. Če je funkcija na $[a, b]$ odsekoma zvezna, je integrabilna.

Definicijo integrala še malce razširimo; dovoljevali bomo tudi enaki zgornjo in spodnjo mejo ali pa bo lahko celo zgornja meja manjša od spodnje. Če je torej $a < b$, postavimo:

$$\int_b^a f := -\int_a^b f$$

in

$$\int_a^a f = 0.$$

Če je funkcija integrabilna na zaprtem intervalu I, je integrabilna tudi na vsakem podintervalu $[a, b] \subseteq I$. Dodatno, če je $c \in I$, velja še

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{1}$$

Z geometrijskega vidika, če je $a < c < b$, je to očitno, ploščino razdelimo pač na dva dela. Vendar se zlahka prepričamo, da zveza (1) velja za poljubne $a, b, c \in I$.

Izrek o povprečni vrednosti. *Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, obstaja taka točka $c \in [a, b]$, za katero je*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Številu $f(c)$ rečemo **povprečna vrednost funkcije** f na intervalu $[a, b]$ in ga pogosto označimo z $\bar{f}$. Če je f nenegativna, je $\bar{f}$ višina pravokotnika z osnovnico $b - a$, ki ima isto ploščino kot lik med krivuljo $y = f(x)$, osjo x in premicama $x = a$ in $x = b$.

Prepričajmo se o veljavnosti izreka za posebni primer, ko je f zvezna. Spomnimo se ene izmed lastnosti zveznih funkcij na zaprtem intervalu, ki pravi, da zvezna funkcija zavzame **vse** vrednosti med maksimalno M in minimalno m. Hkrati pa je

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

oziroma

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

Torej f zavzame tudi vrednost $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ in je torej za neki $c \in [a, b]$ izpolnjeno $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

Geometrijski pomen integrala še enkrat. Naj bo f odsekoma zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Označimo z S_+ vsoto ploščin likov nad osjo x, omejenih z grafom funkcije f in z S_- vsoto ploščin likov pod osjo x. Potem je vrednost določenega integrala enaka razliki ploščin nad osjo x in ploščin pod osjo x:

$$\int_a^b f = S_+ - S_-.$$

1.2.3 Osnovni (fundamentalni) izrek integralskega računa

Do sedaj še nismo omenili nobene učinkovite (brez zapletene limite) metode za izračun integrala. Izkazalo se je (Newton in Leibniz), da je določeni integral tesno povezan s primitivno funkcijo.

Izrek 1.2. ***(Osnovni izrek integralskega računa)***
Denimo, da je funkcija f v Riemannovem smislu integrabilna. Definirajmo

$$S(x) = \int_a^x f, \qquad \textit{za poljuben } x \in [a,b].$$

a) *S je zvezna in odvedljiva funkcija. Še več, $S'(x) = f(x)$ ali z drugimi besedami: S je primitivna funkcija funkcije f. Rečemo tudi, da je določeni integral zvezna in odvedljiva funkcija zgornje meje.*
b) *Če je F poljubna primitivna funkcija za funkcijo f, velja* ***Newton-Leibnizov obrazec***

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Točko **a)** bomo preverili za posebni primer, ko je funkcija f zvezna. Izračunali bomo limito diferenčnega količnika za funkcijo F.

$$\begin{aligned} S'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f \end{aligned}$$

Uporabimo izrek o povprečni vrednosti:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(x+h-x)\, f(c), \qquad \text{za neki } c \text{ med } x \text{ in } x+h, \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) \\ &= f(x), \qquad \text{ker je } f \text{ zvezna.} \end{aligned}$$

b) Naj bo F poljubna primitivna funkcija funkcije f. Torej je $F'(x) = f(x) = S'(x)$ in je torej$(F(x) - S(x))' = 0$. Torej je $F(x) - S(x) = C$, kjer je C realna konstanta. Vrednost integrala $\int_a^b f$ lahko izrazimo kot $S(b)$. Upoštevamo, da je $S(a) = \int_a^a f = 0$ in

$$F(b) - S(b) = C = F(a) - S(a) = F(a),$$

od koder sledi

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= S(b)\\ &= F(b)-C\\ &= F(b)-F(a).\end{aligned}$$

Uvedba nove spremenljivke v določeni integral.

Naj bo f integrabilna na $[a,b]$ in $x=g(t)$ monotona zvezno odvedljiva funkcija, ki $[\alpha,\beta]$ preslika na $[a,b]$. Če je $g(\alpha)=a$ in $g(\beta)=b$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Vemo namreč, da za nedoločeni integral velja: $\int f(g(t))\,g'(t)\,dt=\int f(x)\,dx$, če je $x=g(t)$. Potem je po N.-L. obrazcu

$$\begin{aligned}F(x) &= \int f(x)\,dx=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt=F(g(t))\\ \frac{d}{dt}F(g(t)) &= F'(g(t))\,g'(t)\ \text{ in } F'(x)=f(x)\text{, zato je}\\ \frac{d}{dt}F(g(t)) &= f(g(t))\,g'(t)\ \text{ in}\\ \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt &= G(\beta)-G(\alpha),\ \text{ kjer je } \frac{d}{dt}G(t)=f(g(t))\,g'(t)\end{aligned}$$

Torej je $G(t)=F(g(t))+C$ za neko konstanto C.

1.2.4 Uporaba določenega integrala

1. Ploščina

   - med krivuljama $y=f(x)$, $y=g(x)$ in premicama $x=a$ in $x=b$.

   $$p=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$

   - izseka, ki ga določa krivulja v polarnih koordinatah $r=r(\varphi)$

   $$p=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2\,d\varphi$$

- izseka, ki ga določa krivulja $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned}
dp &= \frac{1}{2} r^2 d\varphi \\
r^2 &= x^2 + y^2 \\
\tan\varphi &= \frac{y}{x} \Rightarrow \left(1 + \tan^2\varphi\right) d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2} \\
d\varphi &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{r^2} \\
dp &= xdy - ydx \\
p &= \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt
\end{aligned}$$

2. Dolžina loka; $ds^2 = dx^2 + dy^2$

- krivulje v parametrični obliki

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

- krivulje v eksplicitni obliki

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

- krivulje v polarni obliki

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)\right) d\varphi$$

3. Prostornina vrtenine;

- del krivulje $y = f(x)$ med premicama $x = a$ in $x = b$ zavrtimo okrog osi x :

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b y^2 dx \\
&= \pi \int_a^b f(x)^2 dx
\end{aligned}$$

- del krivulje $y = f(x)$ med premicama $x = a$ in $x = b$ zavrtimo okrog osi y; tako dobimo cilindrično telo s prostornino:

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)\, dx$$

- del krivulje $y = f(x)$ me premicama $y = c$ in $y = d$ zavrtimo okrog osi y :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d x^2 dy \\ &= \pi \int_a^b f^{-1}(y)^2 \, dy \end{aligned}$$

4. Površina vrtenine;

- del krivulje $y = f(x)$ med premicama $x = a$ in $x = b$ zavrtimo okrog osi x :

$$\begin{aligned} dP &= 2\pi y ds \\ P &= 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx \end{aligned}$$

- krivuljo $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ zavrtimo okrog osi x :

$$P = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

- krivuljo $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ zavrtimo okrog osi x :

$$P = 2\pi \int_a^b r(\varphi) \sin\varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi$$

- vrtenje okrog osi y: $dP = 2\pi x dx$; ostale obrazce dobimo analogno kot zgoraj.