ŠTEVILSKE MNOŽICE

1. Naravna števila $\mathbb{N}$

so števila, s katerimi štejemo.

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

Števke (cifre) so simboli $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$, s katerimi sestavljamo **številke.**

S številkami zapisujemo **števila**.

Isto število lahko namreč predstavimo z različnimi številkami in pri tem uporabimo različne **številske sestave:**

Na primer:

desetiški: $35 = \mathbf{3}.10^1 + \mathbf{5}.10^0$

dvojiški: $35_{[10]} = 32 + 2 + 1 = \mathbf{1}.2^5 + \mathbf{0}.2^4 + \mathbf{0}.2^3 + \mathbf{0}.2^2 + \mathbf{1}.2^1 + \mathbf{1}.2^0 = 100011_{[2]}$.

Desetiška številka 35 in dvojiška številka 100011 predstavljata isto število.

Množica, ki je ekvipolentna množici $\mathbb{N}$, se imenuje **števna**.

Oglejmo si preslikavo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

Ugotovimo: f je bijekcija in $2\mathbb{N}$ je prava podmnožica $\mathbb{N}$.

Množica, iz katere obstaja bijekcija na neko njeno pravo podmnožico, je **neskončna**.

V množici $\mathbb{N}$ sta definirani operaciji $+$ in $\cdot$ z naslednjimi lastnostmi:

m, n, k naj bodo poljubna naravna števila:

1.	$m + (n + k) = (m + n) + k$	asociativnost seštevanja
2.	$m + n = n + m$	komutativnost seštevanja
3.	$(mn)\,k = m\,(nk)$	asociativnost množenja
4.	$mn = nm$	komutativnost množenja
5.	$m.1 = m$	1 je enota za množenje
6.	$(m + n)\,k = mk + nk$	distributivnost

Množica $\mathbb{N}$ je za seštevanje komutativna polgrupa, za množenje pa komutativna polgrupa z enoto. Obe operaciji pa povezuje distributivnost.

Matematična indukcija

je **metoda za dokazovanje** izjav, ki govorijo o naravnih številih. Pogosto za majhna naravna števila ugotovimo kako zakonitost, za katero domnevamo, da velja za vsa naravna števila.

Metoda

Denimo, da želimo dokazati, da izjava $A\,(n)$ velja za vsa naravna števila n.

Napraviti moramo dva koraka:

1. Preveriti, da velja izjava $A(n)$ ob izbiri $n = 1$.
2. Ob predpostavki, da že velja $A(n)$ pokazati, da velja tudi $A(n+1)$.

Princip matematične indukcije nato zagotavlja, da velja izjava $A(n)$ za vsa naravna števila n.

Namreč, ko enkrat preverimo, da velja $A(1)$, uporabimo drugi korak in sklepamo, da velja tudi za naslednika, to je 2; še enkrat uporabimo 2, korak in zvemo, da izjava velja za $n = 3$. Tako nadaljujemo v nedogled.

Zgled:

Dokažimo, da velja

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. korak: Izjava $A(1)$ pravi: $1^2 = \frac{1}{6}(1 \times 2 \times 3)$ in ta je očitno pravilna.

2. korak. Denimo, da enakost zgoraj že velja pri nekem n. Kaj je vsebina izjave $A(n+1)$?

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

Označimo $s_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Potem je

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 = s_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

in to je željeni rezultat.

2. Cela števila $\mathbb{Z}$

Množica celih števil je unija pozitivnih celih, negativnih celih in števila 0. V množici $\mathbb{Z}$ lahko seštevamo, odštevamo in množimo. Poleg lastnosti, ki smo jih že omenili pri naravnih številih velja še:

- 0 je nevtralni element za seštevanje

- vsakemu $k \in \mathbb{Z}$ pripada enolično določen **nasprotni element** $-k$, ki ima lastnost $k + (-k) = 0$.

Pravimo, da so cela števila **kolobar**.

Tudi množica $\mathbb{Z}$ je števna. Preslikava $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ je bijekcija.

$$\begin{aligned} &1 \mapsto 0 \\ &2 \mapsto 1 \\ &3 \mapsto -1 \\ &4 \mapsto 2 \\ &5 \mapsto -2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

3. Racionalna števila (ulomki) $\mathbb{Q}$

Enačba $3x = -6$ je rešljiva v množici $\mathbb{Z}$, medtem ko enačba $5x = 6$ v množici $\mathbb{Z}$ nima nobene rešitve. Množico $\mathbb{Z}$ razširimo tako, da bodo tudi enačbe te vrste rešljive. Vpeljemo ulomke:

Rešitev enačbe $nx = m$, kjer $n \neq 0,\ n, m \in \mathbb{Z}$ je ulomek $\frac{m}{n}$. Isti ulomek reši tudi enačbo: $knx = km$, torej je $\frac{km}{kn} = \frac{m}{n}$. Zapis ulomka torej ni enoličen.

Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sta enaka $\Leftrightarrow ad = bc$.

Seštevanje ulomkov: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ (ali pa ju damo na najmanjši skupni imenovalec)

Množenje ulomkov: $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Obratna vrednost ulomka: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a},\quad a \neq 0.$

Deljenje: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c}$

Algebrajske lastnosti:

$\mathbb{Q}$ ima za seštevanje iste lastnosti kot $\mathbb{Z}$, pri množenju pa dodatno velja še, da ima vsak neničelni element $\mathbb{Q}$ obratno vrednost (inverz). Torej je $\mathbb{Q}$ komutativna grupa za seštevanje, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ je komutativna grupa za množenje, velja pa še distributivnost. Taki algebrski strukturi rečemo **komutativni obseg** ali **polje**.

Množica $\mathbb{Q}$ je **povsod gosta.** To pomeni, da med poljubnima ulomkoma $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ najdemo vsaj še enega. Na primer aritmetična sredina $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$ ima to lastnost.

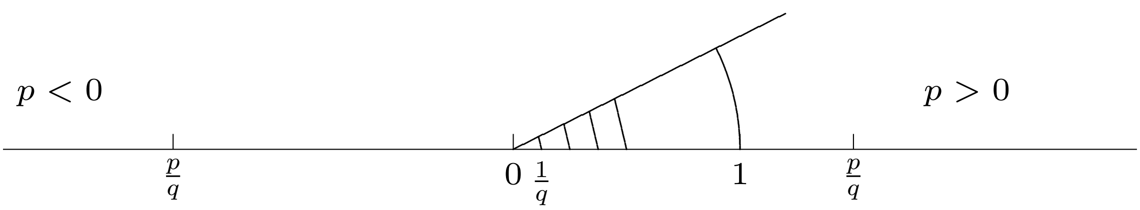
Množica $\mathbb{Q}$ je števna.

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \longrightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \longrightarrow & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \cancel{\frac{2}{2}} & & \frac{2}{3} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \cdots \\
& & & & & & \\
\cdots & & & & & &
\end{array}$$

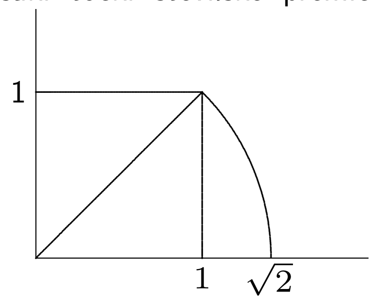
Na sliki je preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$,

n	1	2	3	4	5	6	...
$f(n)$	1	$\frac{1}{2}$	2	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

Elemente $\mathbb{Q}$ lahko ponazorimo s točkami številske premice.



Ali vsaki točki številske premice ustreza kako racionalno število? Hitro se prepričamo, da ne.



Vemo namreč že, da $\sqrt{2}$ ni ulomek.

4. Realna števila

Vsaki točki številske premice lahko priredimo neko realno število.

Decimalni zapis:

a) racionalna števila predstavimo s končnimi ali periodičnimi decimalnimi številkami, npr.: $0.25,\ 56.361$ ali $\frac{1}{3} = 0.3333\,\dot{3},\ \frac{5}{7} = 0.\,\overline{714\,285}$. Ta zapis ni zmeraj enoličen. Na primer $0.\,\dot{9} = 1.0$, saj

$$
\begin{aligned}
x &= 0.\,\dot{9} \\
10x &= 9.\,\dot{9} \\
10x - x &= 9x = 9 \\
x &= 1.
\end{aligned}
$$

b) realna števila, ki niso racionalna se da predstaviti z neperiodičnimi decimalnimi številkami. Imenujemo jih **iracionalna** števila. Npr.: $\sqrt{2},\ \pi,\ e$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{iracionalna števila}\}$$

Množica $\mathbb{R}$ ni števna. Realnih števil je "bistveno več" kakor naravnih. Pravimo, da ima $\mathbb{R}$ moč **continuum**.

Znana je še ena delitev realnih števil:

a) **algebraična števila**

so ničle polinomov s celimi koeficienti

npr.: $\sqrt{2}$ je koren enačbe $x^2 - 2 = 0$, Števili $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ in $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ sta ničli polinoma $x^2 + x - 1$. Algebraičnih števil je števno mnogo.

b) **transcendentna števila**

so tista realna števila, ki niso algebraična, npr.: $\pi,\ e,$ in teh je continuum.

Algebraično se realna števila ne razlikujejo od racionalnih; prav tako so komutativni obseg za seštevanje in množenje.

Množica $\mathbb{R}$ je urejena po velikosti:

$$\begin{aligned} a &< b \Leftrightarrow b > a \Leftrightarrow b - a > 0 \\ a &\leq b \Leftrightarrow b \geq a \end{aligned}$$

Za poljubne $a, b, c \in \mathbb{R}$ velja:

1. Nastopi natanko ena od treh možnosti (zakon trihotomije):
   $a < b, \quad a > b, \quad a = b.$
2. $a < b$ in $b < c \;\Rightarrow\; a < c$
3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
4. $a < b$ in $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
5. $a < b$ in $c < 0 \Rightarrow ac > bc$ pri množenju z negativnim številom se neenačaj **obrne!**

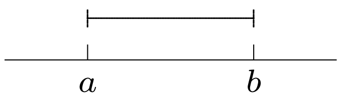
Primeri:

1. Za katere $x \in \mathbb{R}$ je izpolnjena neenakost:
$$2 - 3x \geq x + 1 \ ?$$
2. Reši neenačbo $\frac{x+1}{2x-1} \geq 1$.

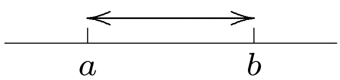
Rešitve neenačb so pogosto

INTERVALI

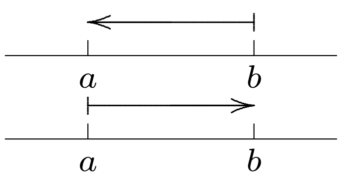
$[a, b] = \{x;\ a \leq x \leq b\}$ **zaprti interval**



$(a, b) = \{x;\ a < x < b\}$ **odprti interval**

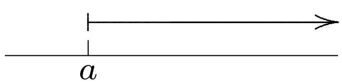


$(a, b] = \{x;\ a < x \leq b\}$
$[a, b) = \{x;\ a \leq x < b\}$ polodprta intervala

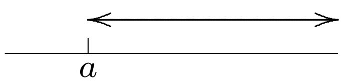


neskončni intervali:

$[a, \infty) = \{x;\ a \leq x\}$



$(a, \infty) = \{x;\ a < x\}$



$(-\infty, b] = \{x;\ x \leq b\}$
$(-\infty, b) = \{x;\ x < b\}$
$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Kvadratna neenačba:

Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a \neq 0$.

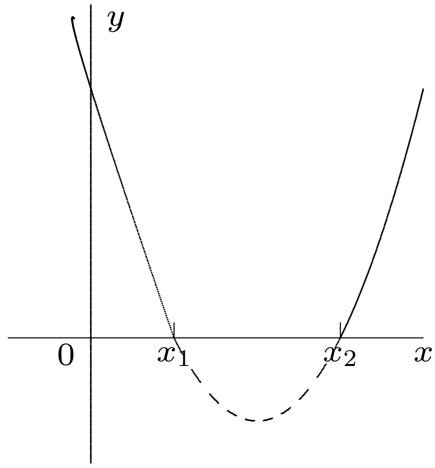
Poiščimo množico tistih realnih števil x, za katere je

$$ax^2 + bx + c \geq 0.$$

Npr.:

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

Prva rešitev: Narišimo graf kvadratne funkcije $y = x^2 - 4x + 3$. Z racepom $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ dobimo, da sta ničli $x_1 = 1$ in $x_2 = 3$.



Pri katerih x-ih imajo točke (x, y) na grafu dane kvadratne funkcije y nenegativen? Tisti del grafa je na sliki narisan s polno črto.

Rešitev neenačbe so vsi x, za katere velja: $x \leq x_1$ ali $x \geq x_2$;
Lahko tudi rečemo, da je rešitev dane neenačbe unija intervalov: $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

Druga rešitev:

Izraz $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ bo nenegativen, če bosta oba faktorja istega predznaka. Bodisi bo $x - 1 \geq 0$ in $x - 3 \geq 0$, ali pa $x - 1 \leq 0$ in $x - 3 \leq 0$. Torej mora biti

$$x \geq 1 \text{ in } x \geq 3 \quad \text{ali} \quad x \leq 1 \text{ in } x \leq 3,$$

od koder sledi

$$x \leq 1 \quad \text{ali} \quad x \geq 3.$$

Potence in koreni:

$p \in \mathbb{N}, \ \ a \in \mathbb{R},$

$$a^p = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{\text{p faktorjev}}$$

Število a imenujemo **osnova,** p pa **eksponent.**

Pravila:

$$\begin{array}{ll}
1. & a^p a^q = a^{p+q} \\
2. & a^p : a^q = a^{p-q} \\
3. & (a^p)^q = a^{pq} \\
4. & (ab)^p = a^p b^p
\end{array}$$

Enaka pravila veljajo, če je eksponent racionalen ali celo realen.

Potenca z racionalnim eksponentom: $a > 0$

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\
a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m
\end{aligned}$$

Korene z lihim eksponentom lahko računamo tudi iz negativnih števil, npr.: $\sqrt[3]{-8} = -2.$

Za korene iz pozitivnih realnih števil pa zmeraj vzamemo pozitivno vrednost:

$\mathbf{n}$-ti **aritmetični koren** iz števila $a > 0$, je tako število $b > 0$, za katerega velja $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, \quad a, b > 0.$$

Torej $\sqrt{9} = 3$ in ne -3, čeprav je $(-3)^2 = 9$.

Iz pravil za računanje s potencami lahko dobimo tudi pravila za računanje s kroeni:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \\
\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a} \\
\sqrt[1]{a} &= a
\end{aligned}$$

O tem , kako vpeljemo potenco z realnih (torej ne nujno racionalnim eksponentom) bomo govorili kasneje.

Logaritmi:

$a > 0$, $a \neq 1$.

$$\log_a x = p \Leftrightarrow a^p = x$$

Latnosti:

$$\begin{aligned}
\log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\
\log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\
\log_a x^r &= r \log_a x \\
\log_a a &= 1, \quad \log_a 1 = 0
\end{aligned}$$

$a = 10$ **desetiški logaritem**
$a = e = 2.71828....$ **naravni logaritem, lnx**
$a = 2$ **dvojiški logaritem**

Absolutna vrednost

$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)\,, \quad \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$
Absolutna vrednost je funkcija, ki realnemu številu odreže eventuelno negativni predznak. Lahko bi rekli tudi takole: absolutna vrednost določa oddaljenost (ta je zmeraj ≥ 0) točke na številski premici od izhodišča.

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Npr.: $|-5| = 5, \quad |10| = 10.$
Lastnosti absolutne vrednosti:
Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja:

1. $|x| \geq 0 \;\; in \;\; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|xy| = |x|\,|y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ **trikotniška neenačba**
4. $|x - y| \geq ||x| - |y||$