# ŠTEVILSKE VRSTE

Recimo, da imamo dano zaporedje $(a_n)$ . Ali ima kak smisel vsota

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$? Zapis: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$ ne bo imelo smisla.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ pa bi najbrž lahko nekako izračunali.

Zato: definiramo neko novo zaporedje, **zaporedje delnih vsot**

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{3}{4}$, $s_3 = \frac{7}{8}$, $s_4 = \frac{15}{16}$

Kot kaže, zaporedje $(s_n)$ konvergira in $\lim s_n = 1$.

**Definicija.** *Za vrsto $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ pravimo, da* **konvergira***, kadar konvergira zaporedje ustreznih delnih vsot $(s_n)$ . V tem primeru je* **vsota vrste** *limita zaporedja $(s_n)$. Če pa je zaporedje delnih vsot $(s_n)$ divergentno, rečemo, da je vrsta* **divergentna***.*

Zapis: $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

**Trditev.** *Če vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dokaz. $a_n = s_n - s_{n-1}$, torej je

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$

*Zgled.*

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$

Ta vrsta ne konvergira, saj je $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0, \ldots$. Zaporedje $(s_n)$ torej ni konvergentno, saj ima dve stekališči.

Naj bodo $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Vrsta $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$ se imenuje **alternirajoča**.

Včasih alternirajoča vrsta konvergira, vrsta iz absolutnih vrednosti členov pa ne.

**Harmonična vrsta:**

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ ne konvergira.

$a_{n+1} + \ldots + a_{2n} =$
$= \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$
$s_{2^n} > 1 + n\frac{1}{2} \Rightarrow s_{2^n}$ divergira ( $\to \infty$)

Ustrezna alternirajoča vrsta pa konvergira.

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots \to \ln 2$

Kadar konvergira vrsta $\sum |a_n|$ , rečemo, da vrsta $\sum a_n$ **konvergira absolutno**. Pokazati se da, da iz absolutne konvergence sledi konvergenca vrste. Če pa vrsta konvergira, vendar ne konvergira absolutno, rečemo, da **pogojno konvergira.**
Če vrsta pogojno konvergira, lahko z različnim vrstnim redom seštevanja dobimo različne limite delnih vsot.

### Računanje z vrstami

Vsota konvergentnih vrst je konvergentna vrsta in

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

Produkt konvergentne vrste s številom je spet konvergentna vrsta:

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum t a_n = t \sum a_n$$

### Geometrijska vrsta

geometrijsko zaporedje: $a_1 = 1,\ q;\ a_n = q^{n-1}$.

$1 + q + q^2 + \ldots$

$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Obravnavali bomo konvergenco zaporedja $\{s_n\}$ .

**Izrek.** *Geometrijska vrsta* $a_1 \left(1 + q + q^2 + \ldots\right)$ *je konvergentna natanko takrat, ko je* $|q| < 1$. *Njena vsota se tedaj glasi*

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Dokaz.

$q > 1$ ali $q < -1 \Rightarrow \{a_n\}$ ni konvergentno (in torej nima limite $0$)

$q = 1 \Rightarrow s_n = n$ in ne konvergira.

$q = -1$ glej primer zgoraj; zaporedje $s_n$ ima dve stekališči.

$|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ in obstaja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$.

### Konvergenčni kriteriji za vrste s pozitivnimi členi

Kako ugotoviti, da neka vrsta konvergira?

1. Če $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow$vrsta divergira.

2. **Primerjalni kriterij.** Recimo, da želimo ugotoviti konvergenco dane vrste $\sum a_n$.
   **a)** Naj bo $\sum b_n$ taka <u>konvergentna</u> vrsta, da velja $0 < a_n \leq b_n$ za vse $n$ razen morda za končno mnogo.
   Potem konvergira tudi vrsta $\sum a_n$. Rečemo, da je vrsta $\sum b_n$ **majoranta** za vrsto $\sum a_n$.
   **b)** Če pa je $\sum c_n$ taka <u>divergentna</u> vrsta, da velja $0 < c_n \leq a_n$ za vse $n$ razen morda za končno mnogo, pa tudi $\sum a$ divergira.
   *Zgled.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$; Ker je $n2^n > 2^n$, če je $n \geq 2$, je $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Vrsta s členi $a_n = \frac{1}{2^n}$ pa je konvergentna geometrijska vrsta ( $q = \frac{1}{2}$). Torej vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ tudi konvergira.
3. **D'Alembertov (ali kvocientni) kriterij.**
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{vrsta } \sum a_n \text{ konvergira} \\ > 1 & \Rightarrow \text{vrsta } \sum a_n \text{ ne konvergira} \\ = 1 & \Rightarrow \text{kriterij odpove.} \end{cases}$$
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ konvergira.
4. **Cauchyjev (korenski) kriterij**
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{vrsta } \sum a_n \text{ konvergira} \\ > 1 & \Rightarrow \text{vrsta } \sum a_n \text{ ne konvergira} \\ = 1 & \Rightarrow \text{kriterij odpove.} \end{cases}$$
   $\sum q^n$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q^n} = q$.

**Leibnitzov kriterij za alternirajoče vrste**
Alternirajoča vrsta $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$ konvergira, če je zaporedje $(a_n)$ vsaj od nekega $n$ naprej padajoče in je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Po tem kriteriju vrsta
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ konvergira, saj zaporedje $\left(\frac{1}{n}\right)$ pada proti $0$.
Ta vrsta konvergira le pogojno, ker je vrsta iz absolutnih vrednosti členov harmonična vrsta, za katero vemo, da ne konvergira.