1 Osnove verjetnostnega računa

1.1 Osnove kombinatorike

- *Pravilo produkta:* če lahko $a \in A$ izberemo na n načinov in $b \in B$ na m načinov, potem lahko urejen par $(a, b) \in A \times B$ izberemo na nm načinov.
- *Pravilo vsote:*
  1. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$.
  2. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- *Permutacija brez ponavljanja* je urejen razpored dolžine n, ki vsebuje n različnih elementov. Število permutacij je $n!$.
- *Permutacija s ponavljanjem* je urejen razpored dolžine n, ki vsebuje k različnih elementov, vsakega $n_1, n_2, \ldots, n_k$, kjer je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Število le-teh je $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.
- *Variacija brez ponavljanja* je urejen razpored dolžine k iz množice z n elementi. Število variacij je $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- *Variacija s ponavljanjem* je urejen razpored dolžine k iz množice z n elementi, ki se lahko ponavljajo. Število le-teh je n^k.
- *Kombinacija brez ponavljanja* je neurejena izbira k elementov iz množice z n elementi. Število kombinacij je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$.
- *Kombinacija s ponavljanjem* je neurejena izbira k elementov iz množice z n elementi, ki se lahko ponavljajo. Število le-teh je $\binom{n+k-1}{k}$.

Naloge

1. Na koliko načinov lahko razporedimo črke A, B, C, D, E
   (a) na 5 mest tako, da vsako črko vzamemo samo enkrat;
   (b) na 3 mesta tako, da vsako črko vzamemo samo enkrat;
   (c) na 5 mest tako, da se nam črke lahko ponavljajo?
2. V omari imamo 3 pare čevljev, 4 obleke in 2 pokrivala. Na koliko različnih načinov se lahko oblečemo, pokrijemo in obujemo.
3. Določi število vseh deliteljev števila 720.
4. Koliko števil med 1 in 1000 ni deljivo hkrati s 5, 7 in 11?
5. Trgovski potnik želi obiskati 4 mesta (LJ, MB, PT, KP).
   (a) Na koliko načinov lahko to stori?

   (b) Na koliko načinov lahko to stori, če mora iti najprej v MB?

6. Imamo 3 črne in 5 rdečih kroglic. Koliko različnih vzorcev dobimo, če kroglice zlagamo v vrsto eno zraven druge?

7. (a) Na koliko načinov se lahko 10 ljudi vsede za ravno oz. okroglo mizo?
   (b) Na koliko načinov se lahko 10 ljudi vsede za ravno oz. okroglo mizo, če sta dva skregana in ne smeta sedeti skupaj?

8. Imamo 5 kroglic in 3 barve. Na koliko načinov lahko pobarvam kroglice?

1.2 Poskusi, dogodki, verjetnost

- *Elementarna verjetnost:* Naj ima poskus n možnih izidov izmed katerih naj bo m število ugodnih izidov za dogodek A. Če so vsi izidi enakoverjetni, velja
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{število ugodnih izidov}}{\text{število vseh izidov}}$$

- *Geometrijska verjetnost*
$$P(A) = \frac{\text{mera ugodnih izidov}}{\text{mera vseh izidov}},$$
kjer je mera lahko dolžina, ploščina, prostornina ...

- N-nemogoč, G-gotov, A-dogodek, $\bar{A}$-nasproten dogodek
  - $P(N) = 0$; $P(G) = 1$; $P(\bar{A} = 1 - P(A)$
  - A, B sta nezdružljiva dogodka, če velja $AB = N$, potem je $A \cup B = A + B$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
  - $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$
  - *Bernoullijeva formula.* Če izvedemo n neodvisnih poskusov, od katerih vsak uspe z verjetnostjo p, je verjetnost, da uspe natanko k poskusov, enaka $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Naloge

1. Mečemo pošteno igralno kocko. Označimo z E_i dogodek, da pade na kocki i pik. Naj bodo podani naslednji dogodki:

   A-pade sodo število pik;
   B-pade liho število pik;
   C-padejo največ 4 pike;
   D-pade vsej 5 pik.

(a) Izrazi te dogodke z elementarnimi dogodki E_i.
(b) Izračunaj njihove verjetnosti.
(c) Kateri dogodki tvorijo popoln sistem dogodkov?

2. V nekem mestu imamo populacijo študentov, izmed njih naključno izberemo enega. Označimo naslednje dogodke:

   A-izbran je študent (moškega spola);
   B-izbrana oseba ne kadi;
   C-izbrana oseba stanuje v študentskem domu.

   (a) Opiši dogodek $AB\bar{C}$.
   (b) Kdaj nastopi enakost $ABC = A$?
   (c) Kdaj velja $C \subseteq B$ oz. $A = B$?

3. Imamo kocko sestavljeno iz 1000 kockic, ki jo pobarvamo in razderemo. Izračunaj verjetnost, da naključno izberemo

   (a) kockico, ki ima pobarvani dve ploskvi;
   (b) kockico, ki ima pobarvano vsaj eno ploskev;
   (c) 2 kockici in vsaj ena ima vsaj eno ploskev pobarvano.

4. Izmed m izdelkov je n izdelkov pokvarjenih. Izberemo k izdelkov. Kakšna je verjetnost, da je natanko l izdelkov pokvarjenih?

5. Imamo množici A in B z močjo $|A| = n$, $|B| = m$. Kakšna je verjetnost, da izmed vseh funkcij $f : A \to B$ izberemo injektivno funkcijo?

6. Naključno izberemo izberemo naravno število n.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je n deljiv s praštevilom p?
   (b) Kakšna je verjetnost, da se n^2 končuje s cifro 1?

7. Izmed naravnih števil naključno in neodvisno izberemo dve števili. Izračunaj verjetnost, da obe števili nista deljivi s praštevilom p.

8. Imamo n parov čevljev. Naključno izberemo $2r$ čevljev. Izračunaj verjetnost, da

   (a) ne dobimo nobenega skupnega para;
   (b) je natanko en par kompleten.

9. Imamo 5 kroglic in 3 predale. Kroglice naključno in neodvisno razporedimo v predale. Kakšna je verjetnost,

   (a) da bo ostal en predal prazen;
   (b) da bosta ostala dva predala prazna?

10. Streljamo v tarčo s polmerom R. Izračunaj verjetnost, da zadenemo krog s polmerom d, če je enakoverjetno, da zadenemo vsako točko.

11. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili. Izračunaj verjetnost, da

    (a) je vsota kvadratov manjša od 1;

    (b) njuna vsota manjša od 1;

    (c) vsota danih števil večja od 1 in manjša od vsote njunih kvadratov?

12. Nakjučno in neodvisno izberemo dve števili z intervala $[0, 1]$. Kakšna je verjetnost, da je vsota danih števil manjša od 1, produkt pa večji od $\frac{2}{9}$?

13. Imamo neskončno šahovsko tablo s stranico kvadrata a. Na tablo vržemo kovanec s premerom $2r < a$. Izračunaj verjetnosti dogodkov:
    A- kovanec leži znotraj kvadrata;
    B- kovanec seka natanko eno stranico.

14. Jože in Marica sta zmenjena med 18. in 20. uro. Njun prihod je naključen in neodvisen. Vsak počaka pol ure in če drugega ni odide. Kolikšna je verjetnost, da se bosta srečala?

1.3 Pogojna verjetnost in Bayesov obrazec

- *Pogojna verjetnost*
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Dogodka A in B sta *neodvisna*, če velja
$$P(AB) = P(A)P(B) \text{ oz. } P(A|B) = P(A).$$

- Če $H_1, H_2, \ldots H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov (vedno se zgodi natanko eden izmed njih), velja izrek o popolni verjetnosti
$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)$$
in *Bayesov obrazec*
$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)}.$$

Naloge

1. V skladišču imamo 20 izdelkov, od tega 16 kvalitetnih. Po vrsti izbiramo izbiramo izdelek za izdelkom dokler ne izvlečemo kvalitetnega. Kakšna je verjetnost dogodkov

   A- šele v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek;
   B- vsaj v tretji izbiri dobimo kvalitetni izdelek;

   če izdelke vračamo oziroma jih ne vračamo?

2. Na neki šoli so dijaki naročeni na Presek. Anketa je pokazala, da 15% dijakov bere članke iz matematike, 20% jih bere fizikalne članke in 22% jih bere računalništvo. Matematične in fizikalne članke bere 5% dijakov, članke iz fizike in računalništva bere 7%, matematiko in računalništvo bere 8% dijakov. Vse članke berejo 3% dijakov. Izračunaj verjetnost, da naključno izbrani dijak:

   (a) ne bere navedenih člankov iz Preseka;

   (b) bere fizikalne ali matematične članke, če bere članke iz računalništva.

3. Na daljici z dolžino 8 cm nakjučno in neodvisno izberemo dve točki. Kakšna je verjetnost dogodkov

   A- točki sta vsaj 1 cm oddaljeni od krajišč;
   B- vsaj ena točka je od krajišč oddalje na več kot 2 cm;
   C- razdalja med točkama ne presega 2 cm

   in izračunaj še $P(C|B)$.

4. Verjetnost, da se pri dvojčkih rodita dva dečka je a, da se rodita dve deklici pa b. Kakšna je verjetnost, da sta se rodila dvojčka, če se je

   (a) prvi rodil deček,

   (b) rodil en deček?

5. Protiletalski top tri krat ustreli proti letalu. V prvem strelu je verjetnost zadetka 0.4, v drugem strelu 0.5 in v tretjem strelu 0.7. Pri čemer en zadetek sestreli letalo z verjetnostjo 0.2, dva zadetka sestrelita letalo z verjetnostjo 0.6, tri krat zadeto letalo je gotovo sestreljeno. Kakšna je verjetnost,

   (a) da je bilo letalo s tremi streli sestreljeno;

   (b) da je bilo letalo dva krat zadeto, če je bilo sestreljeno?

6. V žepu imamo pet kovancev. Trije so pošteni, grb pade z verjetnostjo 0.5, dva pa imata na obeh straneh grb. Iz žepa naključno potegnemo kovanec in ga vržemo. Pade grb. Kakšna je verjetnost, da je tudi na drugi strani grb?

7. V treh žarah so kroglice: v prvi 2 beli in 2 rdeči, v drugi žari 1 bela in 3 rdeče ter v tretji 3 bele in 1 rdeča kroglica. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve v drugo žaro, nato pa kroglico iz druge v tretjo žaro. Nazadnje izberemo kroglico iz tretje žare. Kakšna je verjetnost, da je kroglica rdeča?

8. Delec se giblje po premici. Na vsakem koraku delec bodisi miruje bodisi se premakne za enoto v desno stran. Kakšna je verjetnost, da bo delec po m korakih oddaljen od začetne lege za $k \leq m$ enot?

9. Delec se giblje po premici. Na vsakem koraku se delec z enako verjetnostjo premakne bodisi za enoto v levo stran bodisi za enoto v desno stran. Kakšna je verjetnost, da bo delec po m korakih oddaljen od začetne lege za $k \leq m$ enot?

10. Igralca izmenično mečeta kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je enaka p. Zmaga tisti igralec, ki prvi vrže grb. Kakšna je verjetnost,

    (a) da zmaga igralec, ki je igro začel;

    (b) da zmaga igralec, ki je bil drugi na potezi;

    (c) da se igra ne konča?

11. Igralca izmenično mečeta kovanec. Verjetnost, da pade grb je $p(0 < p < 1)$. Če igralec vrže grb, dobi čokolado, sicer ne dobi ničesar. Zmaga tisti, ki ima prvi dve čokoladi prednosti. Kakšna je verjetnost, da zmaga igralec, ki je igro začel?

12. Tristan in Izolda izmenično mečeta kovanec katerega verjetnost, da pade grb, je enaka p. Tisti, ki vrže grb, dobi dve jabolki. Če vrže cifro, izgubi eno jabolko. Zmaga tisti, ki ima prvi tri jabolka prednosti.

    (a) Kakšna je verjetnost, da zmaga Tristan, ki je igro začel in ni imel nobene prednosti? Ali je igra poštena?

    (b) Kakšna je verjetnost, da zmaga Tristan, ki je igro začel in je imel eno jabolko prednosti?