ZAPOREDJA

OSNOVNE DEFINICIJE

Definicija. *Realno (kompleksno)* **zaporedje** *je preslikava* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$*, ki vsakemu naravnemu številu* n *priredi neko število* a_n*.*

Zaporedje je lahko podano:

- **eksplicitno:** $a_n = f(n)$
  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\quad (a_n)$
  $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$

  Zgled:

  $$\begin{array}{ccc} a_n & = & \frac{1}{2}n^2 \\ 1 & \mapsto & \frac{1}{2} \\ 2 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & \frac{9}{2} \\ 4 & \mapsto & 8 \\ \vdots & & \vdots \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} a_n & = & i^n \\ 1 & \mapsto & i \\ 2 & \mapsto & -1 \\ 3 & \mapsto & -i \\ 4 & \mapsto & 1 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

  Posamezne funkcijske vrednosti imenujemo **členi** zaporedja.
  Npr.: a_k . . . k -ti člen zaporedja.

- **rekurzivno:** a_1 podan, $a_{n+1} = f(a_n)$, $\forall n$

Zgled: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2,\ n = 1, 2, \ldots$
$(a_n) = (1, 3, 5, 7, \ldots)$
Eksplicitna formula za isto zaporedje: $a_n = 2n - 1$.

$a_1;\ a_{n+1} = a_n + d, \quad d$ je konstantna (neodvisen od n)

Definicija. **Aritmetično** je tako zaporedje, pri katerem je razlika med dvema sosednjima členoma konstantna ($a_{n+1} - a_n = d$)

Splošni člen: $a_n = a_1 + (n-1)\,d,\ n = 1, 2, \ldots$
$a_1,\ a_{n+1} = a_n q, \quad q$ je dana konstanta.

Definicija. **Geometrijsko zaporedje** je tako zaporedje, pri katerem je kvocient med dvema sosednjima členoma konstanten ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$)

Splošni člen: $a_n = a_1 q^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$

$a_1 = 1,\ q = -\frac{1}{2} \Rightarrow \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\}$

- **dvočlenska rekurzija:**

$a_1,\ a_2$ poznamo, $a_{n+1} = f\left(a_n, a_{n-1}\right)$

Fibonaccijevo zaporedje:

$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots\}$

Splošna formula: $a_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Definicija. *Množico števil* $\{x;\ |x-a| < \varepsilon\}$ *imenujemo* okolica (ε - okolica) *števila* a.
Včasih označimo tudi $K_\varepsilon(a)$.
V $\mathbb{R}$ *je* $K_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$

V $\mathbb{C}$ je $K_\varepsilon(a)$ krog s središčem v točki a in s polmerom ε.

TOPOLOŠKE LASTNOSTI ZAPOREDIJ

Stekališče in limita

Definicija. *Število* b *se imenuje* **stekališče** *zaporedja* (a_n), *če je v* vsaki *okolici števila* b neskončno *členov tega zaporedja.*

$\left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)$, stekališči sta 1 in -1.
$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, stekališči sta 0 in 1.

Definicija. *Število* a *imenujemo* **limita** *zaporedja* (a_n), *če je* izven vsake *okolice števila* a le končno *mnogo členov zaporedja.*

Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$ z lastnostjo: $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Zapis: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$

Če ima zaporedje limito, rečemo, da je **konvergentno**. V nasprotnem primeru je **divergentno**.

Če ima zaporedje limito, je ta ena sama.

Definicija. *Zaporedje* (b_n) *je* **podzaporedje** *zaporedja* (a_n), *če obstaja taka* naraščajoča *funkcija* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *(* $f(n) < f(n+1)\ \forall n$*), da je* $b_n = a_{f(n)}$.

Zgled: $a_n = \frac{1}{n}$;
Zaporedje $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$ je podzaporedje zaporedja (a_n).
$f(n) = 2n$.

Izrek. *Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno in ima isto limito.*

Izrek. *Če ima zaporedje kakšno stekališče s, obstaja podzaporedje, ki konvergira k s.*

Omejenost zaporedij

Število A je **zgornja meja** zaporedja (a_n) , če velja $a_n \leq A$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
Če zgornja meja zaporedja (a_n) obstaja, rečemo, da je zaporedje **navzgor omejeno.**

Če je A zgornja meja, je vsako število $b > A$ tudi zgornja meja.

Število B je **spodnja meja** zaporedja $\{a_n\}$, če velja $a_n \geq B$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
Če spodnja meja zaporedja $\{a_n\}$ obstaja, rečemo, da je zaporedje **navzdol omejeno.**

Če je B spodnja meja, je vsako število $b < B$ tudi spodnja meja.

Zaporedje je **omejeno**, kadar je omejeno navzdol in navzgor.

Število M se imenuje **natančna zgornja meja** (ali **supremum**) zaporedja, če velja:
- M je zgornja meja.
- $\forall \varepsilon > 0$ obstaja vsaj en a_n, za katerega je $a_n > M - \varepsilon$.

Zapis: $M = \sup a_n$

Supremum je najmanjša izmed vseh zgornjih mej.

Število m se imenuje **natančna spodnja meja** (ali **infimum**) zaporedja, če velja:
- m je spodnja meja.
- $\forall \varepsilon > 0$ obstaja vsaj en a_n, za katerega je $a_n < m + \varepsilon$.

Zapis: $m = \inf a_n$.

Infimum je največja izmed vseh spodnjih mej.

ZGLED:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n}, & n \text{ sodo št.} \\ -\frac{n}{n+1} & n \text{ liho št} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, -\frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \ldots\right)$$

$M = \frac{3}{2}$, $m = -1$
Število $\frac{3}{2}$ je člen zaporedja, medtem ko -1 ni.

Pokažimo, da je -1 res infimum tega zaporedja.

Če je n sodo št., je $a_n = \frac{n}{n+1} > 0 > -1$.

Če je n liho št., pa je

$$\begin{aligned} a_n &= -\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= -\left(\frac{(n+1)-1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= -1 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ker je lahko $\frac{1}{n+1}$ poljubno majhno število, se a_n številu -1 poljubno približa.

Izrek. *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

Izrek. *Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče. Če ima omejeno zaporedje eno samo stekališče, je to tudi limita.*

Drugače rečeno:
Zaporedje je konvergentno natanko tedaj ko je omejeno in ima eno samo stekališče.

ZGLED:

- Primer zaporedja, ki ima eno samo stekališče, pa NI konvergentno.
- $a_n = n^{(-1)^n}, \quad (1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \ldots)$
Edino stekališče tega zaporedja je 0. Vendar to zaporedje ni omejeno, saj vsebuje vsa soda naravna števila.
- $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}, \quad (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$
Zaporedje je omejeno, stekališča so 1, -1 in 0.

Monotona zaporedja

Zaporedje je **naraščajoče**, če je za vsak $n \in \mathbb{N}$ izpolnjeno $a_n \leq a_{n+1}$. Zaporedje je **padajoče**, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n \geq a_{n+1}$. Zaporedje je **monotono**, če je naraščajoče ali padajoče.

Zgledi:

- $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$
  $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n-1} = -\frac{4}{(2n+1)(2n-1)} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow a_{n+1} < a_n$, torej je to zaporedje padajoče.
- $a_n = b^n$, $0 < b < 1$
  $a_{n+1} - a_n = b^{n+1} - b^n = b^n(b-1) < 0.$
  Tudi to zaporedje je padajoče.

Izrek. *Navzgor omejeno naraščajoče zaporedje je konvergentno in velja:* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n}$.

Izrek. *Navzdol omejeno padajoče zaporedje je konvergentno in velja:* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf a_n}$.

Računske operacije z zaporedji

(a_n) , (b_n) dani konvergentni zaporedji,
$t \in \mathbb{R}$ (ali $\mathbb{C}$)

Tvorimo nova zaporedja:
$c_n = a_n + b_n,\ d_n = ta_n,\ f_n = a_n b_n,\ g_n = \frac{a_n}{b_n},\ b_n \neq 0$
$a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots$
$a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$
$ta_1, ta_2, ta_3, \ldots$
$a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots$
$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots$
IZREK. Zaporedja $(a_n + b_n)$, (ta_n) in $(a_n b_n)$ so tudi konvergentna in velja

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\ \lim_{n\to\infty} ta_n &= t \lim_{n\to\infty} a_n \\ \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) &= \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \end{aligned}$$

Č dodatno velja še $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, je konvergentno tudi zaporedje $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ in velja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

IZREK. Če je zaporedje $(a_n) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ konvergentno, je pri poljubnem $k \in \mathbb{N}$ konvergentno tudi zaporedje $(\sqrt[k]{a_n})$ in ima limito $\sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.
Naj bo $b > 0$. Potem iz konvergence zaporedja (a_n) sledi konvergenca zaporedja (b^{a_n}) in $\lim\limits_{n\to\infty} b^{a_n} = b^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Zgledi:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-n+1}{n^3+1} \neq \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3+2n^2-n+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3+1\right)}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+n^2-n+1}{n^3+1} =$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) =$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2n^2+1}\right) =$
6. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$
   $a_{n+1} - a_n = 3 - \frac{2}{a_n} - a_n = -\frac{(a_n-1)(a_n-2)}{a_n}$
   Pokažimo, da so vsi členi $a_n > 2$. Iz tega bo sledilo, da so tudi $a_n > 1$ in zato $a_{n+1} - a_n < 0$ in zaporedje padajoče.
   Matematična indukcija: $a_1 = 3 > 2$.
   Denimo, da je $a_n > 2$. Potem sledi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} &< \frac{1}{2} \\
-\frac{2}{a_n} &> -1 \\
3 - \frac{2}{a_n} &> -1 + 3 \\
a_{n+1} &> 2.
\end{aligned}
$$

   Zaporedje je torej padajoče in navzdol omejeno. Kot tako je po izreku zgoraj tudi konvergentno. Izračunajmo še limito.
   $a = \lim a_n = \lim a_{n+1} = \lim \left(3 - \frac{2}{a_n}\right) = 3 - \frac{2}{\lim a_n} = 3 - \frac{2}{a}$.
   Dobili smo enačbo $a = 3 - \frac{2}{a}$, oziroma $a^2 - 3a + 2 = 0$. Ta kvadratna enačba ima korena $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$. Ker so vsi členi našega zaporedja večji od 2, število 1 ne more biti limita.
7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ? \qquad \left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2\sqrt{2}},\ \ldots\right)$
8. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$
   $(2, 1.5, 1.41\overline{6}, 1.41421568628, 1.41421356238, \ldots)$
   $\sqrt{2} = 1.414213562373\ldots$

Definicija števila e

Število e, ki je osnova naravnega logaritma, bomo definirali z zaporedjem racionalnih števil, ki ima e za svojo limito.

Opazovali bomo zaporedji:
$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \geq 1$ in $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n},\ n \geq 2$

$(a_n) : 2.0,\ 2.25,\ 2.37,\ 2.441,\ 2.488,\ 2.522\ldots$
$a_{30} = 2.674,\ a_{100} = 2.705,\ a_{5000} = 2.718\,01$

Zaporedje (a_n) je naraščajoče.

$(b_n): 4.0,\ 3.375,\ 3.16,\ 3.052,\ 2.986\ldots$
$b_{30} = 2.765,\ b_{100} = 2.732,\ b_{5000} = 2.718\,55$
Zaporedje (b_n) je padajoče.

Izkaže pa se tudi, da je $b_{n+1} > a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj je
$b_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)} =$
$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$
$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n > a_n$
Sledi: $2 = a_1 \leq a_n < b_{n+1} \leq b_2 = 4$

Torej sta zaporedji (a_n) in (b_n) monotoni in omejeni in zato konvergentni. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

imata obe zaporedji isto limito in to je e.

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{-n}}$$

Zgledi:

1. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n =$

   $2n = m, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{m\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

2. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-2}}{\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}} = \frac{e^{-2}}{e^2} = \frac{1}{e^4}$