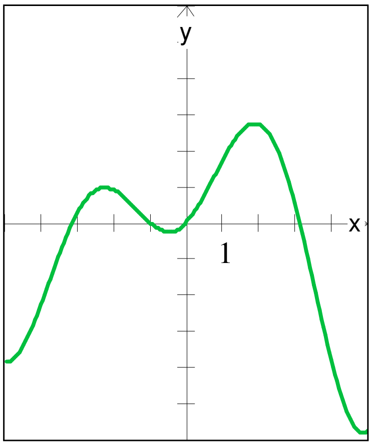
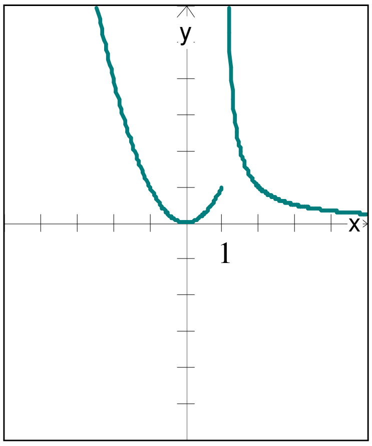
ZVEZNOST funkcije v točki in na intervalu

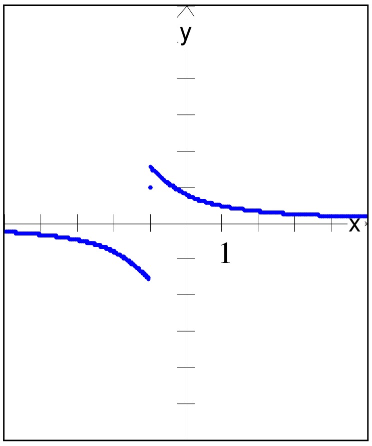
Na spodnjih slikah so grafi treh različnih funkcij. Prvi graf funkcije je povezana krivulja, medtem ko sta druga dva sestavljena iz več kosov, tretji graf celo iz treh (pikica je namreč sestavni del grafa). Matematično bomo opisali lastnost, da je graf bodisi povezan, bodisi v kaki točki (točkah) pretrgan.



Slika 1



Slika 2



Slika 3

Funkcija je **zvezna v točki** $x_0 \in D_f$, če velja:
funkcijske vrednosti $f(x)$ se poljubno malo razlikujejo od vrednosti $f(x_0)$, če je le x dovolj blizu x_0.

Ekvivalentno je:
Funkcija f je **zvezna v točki** x_0, če:

1. $x_0 \in D_f$
2. Obstaja $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$
3. $f(x_0) = L$

Naj bosta f in g zvezni v točki x_0
$\Rightarrow$ naslednje funkcije so zvezne v točki x_0

- vsota $f + g$
- produkt fg
- kompozitum $f \circ g$, če je f zvezna v točki $g(x_0)$
- $\frac{f}{g}$, če je $g(x_0) \neq 0$.

Def.: Funkcija f je **zvezna na odprtem intervalu** (a, b) , če je definirana in zvezna v vsaki točki tega intervala.
$\forall\ x_0 \in (a, b) : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Def.: Funkcija f je **zvezna na zaprtem intervalu** $[a, b]$, če je zvezna na odprtem intervalu (a, b) in velja $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ in $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Naslednje funkcije so zvezne na celem definicijskem območju: polinomi, korenske, $x \mapsto |x|$, $\sin$, $\cos$, $\arctan$, arccot, $\arcsin$, $\arccos$, $\exp\ (x \longmapsto e^x)$, $\sinh$, $\cosh$, $\log$, $\ln$

Primeri funkcij s točkami nezveznosti: racionalne (npr.: $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{x-1}{(x+2)^2}$), $\tan$, $\cot$, $\frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

LASTNOSTI ZVEZNIH FUNKCIJ NA ZAPRTEM INTERVALU

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Velja:

1. f je na intervalu $[a, b]$ **omejena**.
2. Če je $f(a) f(b) < 0$, obstaja tak $c \in (a, b)$, da je $f(c) = 0$. **Bisekcija**.
3. Če sta m in M natančni meji funkcije f (infimum in supremum) na intervalu $[a, b]$, obstajata taki točki $x_1, \ x_2 \in [a, b]$, da je $f(x_1) = m$ in $f(x_2) = M$.
   Zvezna funkcija na zaprtem intervalu **doseže** svoj **minimum** in **maksimum**.

4. Če je $m < c < M$, obstaja tak $x_0 \in [a, b]$, da je $f(x_0) = c$.
   Zvezna funkcija **zavzame** tudi **vse vrednosti med** m in M. Zaloga vrednosti $f([a, b]) = [m, M]$.
5. Če je $f : [a, b] \to [m, M]$ **zvezna in monotona**, obstaja $f^{-1} : [m, M] \to [a, b]$ in je tudi **zvezna in monotona**.
   f naraščajoča $\Rightarrow f^{-1}$ naraščajoča
   f padajoča $\Rightarrow f^{-1}$ padajoča.