MATEMATIKA 1
E-VS
domače naloge

OSNOVE TEORIJE MNOŽIC

1. Določi množici $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ter $(A \cap B) \cap C$, če je $A = \{x; 0 < x < 2\}$, $B = \{x; 1 < x < 5\}$, $C = \{x; 4 \leq x \leq 10\}$.

2. Predstavi naslednjo množico točk v pravokotnem koordinatnem sistemu in ugotovi, ali so točke $(0,0)$, $(1,0)$ in $(0,1)$ njeni elementi:

$$C = \{(x,y);\ x \geq 0 \wedge y > 0 \wedge x^2 + y^2 < 1\}.$$

PRESLIKAVE - osnove

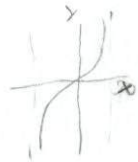
3. Ugotovi, ali je funkcija liha ali soda:

   (a) $f(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}$,

   (b) $g(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

4. Ugotovi, ali je funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \tan x$, injektivna oz. surjektivna oz. bijektivna in odgovore utemelji.

tg x



5. Ugotovi, ali je funkcija $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f((n,m)) = n + m$, injektivna oz. surjektivna oz. bijektivna in odgovore utemelji.

6. Določi definicijsko območje funkcije $\sqrt{f(g(f(x)))}$, če sta

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2},\quad g(x) = \frac{3}{x}.$$

MATEMATIČNA INDUKCIJA

7. S pomočjo matematične indukcije dokaži naslednje trditve:

   (a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (b) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$

   (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

   (d) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (2n-2)2^n + 2$

   (e) $8 | (3^{2n+2} - 8n - 9)$

   (f) $6 | n(n+1)(2n+1)$

   (g) $2^n > n$

   (h) $9 | (3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4)$

   (i) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

   (j) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

   (k) $6 | (3^n + 2 \cdot 5^{n+1} + 1)$

   (l) $3 | (5^n + 2^{n+1})$

REALNA ŠTEVILA, ABSOLUTNE VREDNOSTI

8. V obsegu realnih števil reši naslednjo neenačbo:
$$|x+1|+|2-x|>|3+x|.$$

9. V obsegu realnih števil zapiši množico rešitev naslednje neenačbe:
$$|x|-|x-4|>3.$$

10. Poišči realne rešitve enačbe:
$$|x+1|-|x|+3\cdot|x-1|-2\cdot|x-2|=x+2.$$

11. Poišči realne rešitve neenačbe:
$$2\cdot|x+1|+|x-5|\leq x+9.$$

12. V obsegu realnih števil reši naslednjo neenačbo:
$$x^2-2|x+3|-2>0.$$

13. Poišči realne rešitve neenačbe
$$|x^2-4x|+3>x^2+|x-5|.$$

KOMPLEKSNA ŠTEVILA

14. Poišči množico točk v komplekni ravnini, ki zadoščajo pogoju:
$$|z+1|=|2z-1|.$$

15. Določi množico točk v komplekni ravnini, ki zadoščajo zvezi:
$$|2z|<|1+z^2|.$$

16. Reši enačbo:
$$4z(z-1)=|2z-1|-7.$$

17. Izračunaj $\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{(1+i)^{10}}$.

18. Poišči kompleksne rešitve enačbe:
$$z^2(\overline{z})^7=(i-1)^6.$$

19. Poišči kompleksne rešitve enačbe:
$$z^8+z^4-12=0.$$

ZAPOREDJA

20. Dokaži, da je zaporedje $a_n=\frac{2n+1}{2n-1}$ monotono, omejeno ter izračunaj njegovo limito. Koliko členov zaporedja se od števila 1 razlikuje za več kot 10^{-2}?

21. Dokaži, da je zaporedje, podano s splošnim členom $a_n=\frac{n+1}{2-3n}$ konvergentno. Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot 10^{-3}?

22. Dokaži, da je zaporedje, podano s splošnim členom $a_n=\frac{n^2-1}{3n^2+1}$ monotono, omejeno in izračunaj njegovo limito.

23. Dokaži, da je zaporedje $a_n=\frac{2n^2-1}{3n^2+2}$ konvergentno in izračunaj njegovo limito!

Mario Lamesic
93572573

1) $A = \{1\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

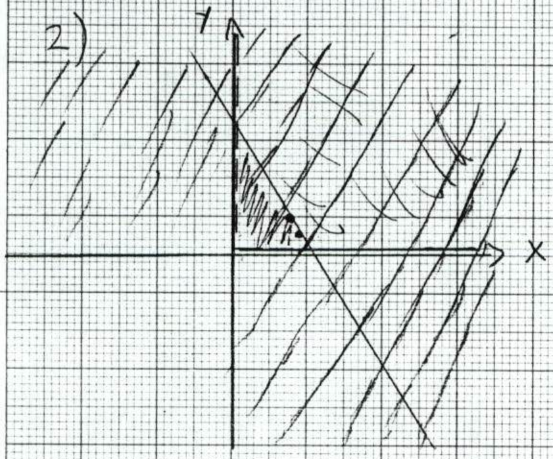
$A \cup C = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A \cap B = \{\ \}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 4\}$

$(A \cap B) \cap (C) = \{\ \}$

2)



$x^2 + y^2 < 1$

$x^2 < 1 - y^2$

$x^2 < (1-y)(1+y) /^{\sqrt{}}$

$x < \sqrt{(1-y)(1+y)}$

$x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

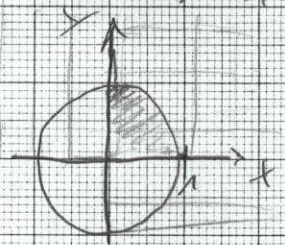
$x_2 < \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$y_1 = \frac{1}{2}$ $y_2 = \frac{1}{3}$

$y = 0$

$x = 0$

$x^2 + y^2 < 1$



3) a) $f(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}$

$f(-x) = (1-(-x))^{\frac{2}{3}} + (1+(-x))^{\frac{2}{3}} = (1+x)^{\frac{2}{3}} + (1-x)^{\frac{2}{3}} = (1+x+1-x)^{\frac{2}{3}} =$

$= 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$ soda

b) $g(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

$g(-x) = \log(-x + \sqrt{1-x^2}) = -\log x + \log\sqrt{1+x^2}$ ni soda!

$-g(x) = -(\log(x + \sqrt{1+x^2})) = -(\log x + \log\sqrt{1+x^2}) = -\log x - \log\sqrt{1+x^2}$

ni liha!

4) $f: R \to R$

$f(x) = \tan x$

- je surjektivna (-//- -//- -//- enkrat)
- ni injektivna (vzporednica seka funkcijo več kot enkrat)
- ni bijektivna (ker ni inj. in surjektivna hkrati).

6) $f(g(f(x))) = f\left(g\left(\frac{x+1}{x-2}\right)\right) = f\left(\frac{3}{\frac{x+1}{x-2}}\right) = \frac{4x-5}{x-8}$ $x_1 \neq -1$, $x_2 \neq \frac{5}{4}$, $x_3 \neq 8$

$R = (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{5}{4}\right) \cup (8, \infty)$

Mario Lamešić
93572573

f) $6 \mid m(m+1)(2m+1)$ $\quad m=1$: $k=1$ $\quad$ pred: $\overbrace{m(m+1)\cdot(2m+1)}^{2m^3+3m^2+m}=k\cdot 6$

dok: $(m+1)(m+2)\cdot(2m+3)=6a$

$L=(m+1)\cdot(m+2)\cdot(2m+3)=m^2+m+2m+2(2m+3)=2m^3+2m^2+4m^2+4m+3m^2+3m+6m+6$

$=2m^3+9m^2+13m+6=\underline{2m^3}+\underline{3m^2}+6m^2+12m+\underline{m}+6=$

$=k\cdot 6+6m^2+12m+6=6(k+m^2+2m+1)$

h) $9 \mid (3\cdot 4^{m+1}+10^{m-1}-4)$ $\quad m=1$ $\quad k=5$ $\quad$ pred: $3\cdot 4^{m+1}+10^{m-1}-4=k\cdot 9$

dok: $3\cdot 4^{m+2}+10^{m}-4=9a$

$L=4\cdot 3\cdot 4^{m+1}+10^{m}\cdot 10:10-4=3\cdot 4^{m-1}-4+3\cdot 3\cdot 4^{m+1}+10\cdot 9^{m-1}=9a+9\cdot 1^{m+1}+$

$+10\cdot 9^{m-1}=9(a+4^{m+1}+10^{m-1})$

i) $1^2-2^2+3^2-\dots+(-1)^{m-1}\cdot m^2=(-1)^{m-1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$

$m=1$: $\quad L=D \quad 1=1$ ✓

pred: $1^2-2^2-\dots+(-1)^{m-1}\cdot m^2=(-1)^{m-1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$

dok: $1^2-2^2-\dots+(-1)^{m}\cdot(m+1)^2=(-1)^{m}\cdot\frac{(m+1)\cdot(m+2)}{2}=-1^{m}\cdot\left(\frac{m^2+m+2m+2}{2}\right)=-1^{m}\left(\frac{m^2+3\ldots}{2}\right.$

$L=1^2-2^2-\dots+(-1)^{m-1}\cdot m^2+(-1)^{m}\cdot(m+1)^2=(-1)^{m-1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}+(-1)^{m}\cdot(m+1)^2=$

$=-1^{m}\cdot(-1)^{-1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}+(-1)^{m}\cdot(m+1)^2=-1^{m}\cdot\left(-1\cdot\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)^2\right)=$

$=-1^{m}\cdot\left(-1\cdot\frac{m^2+m}{2}+m^2+2m+1\right)=-1^{m}\left(\frac{-m^2-m+2(m^2+2m+1)}{2}\right)=$

$=-1^{m}\left(\frac{-m^2-m+2m^2+4m+2}{2}\right)=-1^{m}\left(\frac{m^2+3m+2}{2}\right)$ ✓

j) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\dots+m(m+1)(m+2)=\frac{m(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)}{4}$

$m=1$: $\quad L=D \quad 6=6$ ✓

pred: $1\cdot2\cdot3+\dots+m(m+1)\cdot(m+2)=\frac{m(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)}{4}$

dok: $1\cdot2\cdot3+\dots+(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)=\frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)\cdot(m+4)}{4}=$

$=\frac{m^4+10m^3+35m^2+50m+24}{4}$

$L=1\cdot2\cdot3\dots+m(m+1)\cdot(m+2)+(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)=\frac{m(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)}{4}+(m+1)\cdot$

$\cdot(m+2)\cdot(m+3)=\frac{m^4+10m^3+35m^2+50m+24}{4}$ ✓

k) $6 \mid (3^{m}+2\cdot 5^{m+1}+1)$ $\quad$ pred: $3^{m}+2\cdot 5^{m+1}+1=k\cdot 6$

$m=1$: $k=9$ $\quad$ dok: $3^{m+1}+2\cdot 5^{m+2}+1=6a$

$L=3^{m+1}+2\cdot 5^{m+2}+1=3^{m}\cdot 3^{1}+2\cdot 5^{m+1}\cdot 5^{1}+1=$

$=k\cdot 6\cdot 3^{1}\cdot 5^{1}=k(6\cdot 3^{1}\cdot 5^{1})$

Mario Lamesic
93572573

7) a) $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

$n=1: \quad L=D \quad 1=1$ ✓

pred: $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

dok: $1^2+2^2+\dots+(n+1)^2=\frac{(n+1)\cdot(n+1)\cdot 2(n+1)}{6}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$

$L=1^2+2^2+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=$

$=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$

b) $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$

$n=1: \quad L=D \quad 1=1$ ✓

pred: $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$

dok: $1+3+\dots+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$

$L=1+3+\dots(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$ pred: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$

$n=1: \quad L=D \quad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ✓ dok: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$

$L=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^n-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n-1}\cdot 2}{2^n\cdot 2}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^n\cdot 2^1+1}{2^{n+1}}=$

$=\frac{2^{n+1}-2+1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$

d) $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\dots+n\cdot 2^n=(2n-2)2^n+2$

$n=1: \quad L=D \quad 2=2$ ✓ pred: $1\cdot 2^1+\dots+n\cdot 2^n=(2n-2)2^n+2$

dok: $1\cdot 2^1+\dots+(n+1)2^{n+1}=(2(n+1)-2)2^{n+1}+2$

$L=1\cdot 2^1+\dots n\cdot 2^n+(n+1)\cdot 2^{n+1}=(2n-2)2^n+2+(n+1)\cdot 2^{n+1}=$

$=2(n-1)2^n+2+(n+1)\cdot 2^{n+1}=2^{n+1}(n-1)+2+(n+1)=2^{n+1}\cdot 2n+2$

e) $8\mid(3^{2n+2}-8n-9)$ $\quad n=1: \quad k=8$ pred: $3^{2n+2}-8n-9=k\cdot 8$

dok: $3^{2(n+1)+2}-8(n+1)-9=8a$

$L=3^{2(n+1)+2}-8(n+1)-9=3^{2n+2+2}-8n-8-9=3^{2n+2}\cdot 3^2-8n-8-9$

$=k\cdot 8\cdot 3^2-8=8(k\cdot 3^2-1)=8a$

Mario Lameski
93572573

7) $3 \mid (5^n + 2^{n+1})$ $\quad n=1: \; k=3$

pretp: $5^n + 2^{n+1} = k \cdot 3$

dok: $5^{n+1} + 2^{n+2}$ $\qquad L = 5^{n+1} + 2^{n+2} = 5^n \cdot 5^1 + 2^{n+1} \cdot 2^1 = k \cdot 3 \cdot 5^1 \cdot 2^1 =$

$= k(3 \cdot 5 \cdot 2)$

---

8) $|x+1| + |2-x| > |3+x|$

I $\; -3 \;$ II $\; 1 \;$ III $\; 2 \;$ IV

I) $x < -3$

$-(x+1) + (2-x) > -(3+x)$

$-x-1+2-x > -3-x$

$-x > -4$

$x < 4$ $\qquad R_1 = (-\infty, -3)$

II) $-3 \le x < -1$

$-(x+1) + (2-x) > (3+x)$

$-x-1+2-x > 3+x$

$-3x > 2$

$-x > \frac{2}{3}$

$x < -\frac{2}{3}$

$R_2 = [-3, -1)$

III) $-1 \le x < 2$

$(x+1) + (2-x) > (3+x)$

$x+1+2-x > 3+x$

$-x > 0$

$x < 0$

$R_3 = [-1, 0)$

IV) $x \ge 2$

$(x+1) + (-(2-x)) > (3+x)$

$x+1-2+x > 3+x$

$x > 4$

$R_4 = (4, \infty)$

---

9) $|x| - |x-4| > 3$

I $\; 0 \;$ II $\; 4 \;$ III

I) $x < 0$

$-(x) - (-(x-4)) > 3$

$-x + x - 4 > 3$

$-4 > 3$

$R_1 = (-\infty, 0)$

II) $0 \le x < 4$

$(x) - (-(x-4)) > 3$

$x + x - 4 > 3$

$2x > 7$

$x > \frac{7}{2}$

$R_2 = (\frac{7}{2}, 4)$

III) $x \ge 4$

$x - (x-4) > 3$

$x - x + 4 > 3$

$4 > 3$

$R_3 = [4, \infty)$

$R = (-\infty, 0) \cup (\frac{7}{2}, \infty) \setminus \{4\}$

---

10) $|x+1| - |x| + 3 \cdot |x-1| - 2 \cdot |x-2| = x+2$

I $\; -1 \;$ II $\; 0 \;$ III $\; 1 \;$ IV $\; 2 \;$ V

I) $x < -1$

$-(x+1) - (-x) + 3(-(x-1)) - 2(-(x-2)) = x+2$

$-x-1+x+3(-x+1) - 2(-x+2) = x+2$

$-2x = 4$

$x = -2$ $\qquad R_1 = \{-2\}$

II) $-1 \le x < 0$

$x+1-(-x)+3(-(x-1)) - 2(-(x-2)) = x$

$x+1+x-3x+3+2x-4 = x+2$

$0 = 2$

$R_2 = [-1, 0)$

III) $0 \le x < 1$

$x+1-(x)+3 \cdot (-(x-1)) - 2 \cdot (-(x-2)) = x+2$

$x+1-x+3(-x+1) - 2(-x+2) = x+2$

$-2x = -2$

$x = -1$

$R_3 = \{\}$

Mario Lamesic
93572573

IV) $1 \le x < 2$

$(x+1)-(x)+3(x-1)-2(-(x-2)) = x+2$

$x+1-x+3x-3+2x-4 = x+2$

$4x = 8$

$x = 2$

$R_4 = [-1, 2]$

V) $x \ge 2$

$(x+1)-(x)+3(x-1)-2(x-2) = x+2$

$x+1-x+3x-3-2x+4 = x+2$

$2 = 2$

$R_5 = [2, \infty)$

---

11) $2\cdot|x+1| + |x-5| \le x+9$

I) $x < -1$

$2(-(x+1)) + (-(x-5)) \le x+9$

$-2x-2-x+5 \le x+9$

$-2x \le 6$

$x \ge -\frac{3}{2}$

$R_1 = [-\frac{3}{2}, -1)$

II) $-1 \le x < 5$

$2(x+1) + (-(x-5)) \le x+9$

$2x+2-x+5 \le x+9$

$7 \le 9$

$R_2 = [-1, 5)$

III) $x \ge 5$

$2(x+1)+(x-5) \le x+9$

$2x+2+x-5 \le x+9$

$2x \le 12$

$x \le 6$

$R_3 = [5, 6]$

$R = [-\frac{3}{2}, 6]$

---

12) $x^2 - 2|x+3| - 2 > 0$

I) $x < -3$

$x^2 - 2(-(x+3)) - 2 > 0$

$x^2 - 2(-x-3) - 2 > 0$

$x^2 + 2x + 6 - 2 > 0$

$x^2 + 2x + 4 > 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = -12$

$R_1 = \{\}$

II $x \ge -3$

$x^2 - 2(x+3) - 2 > 0$

$x^2 - 2x - 6 - 2 > 0$

$x^2 - 2x - 8 > 0$

$(x-4)\cdot(x+2) > 0$

$x_1 = 4$

$x_2 = -2$

$R_2 = [-2, 4]$

---

13) $|x^2-4x| + 3 > x^2 + |x-5|$

$|x|\cdot|x-4| + 3 > x^2 + |x-5|$

I) $x < 0$

$-(x)\cdot(-(x-4)) + 3 > x^2 + (-(x-5))$

$-x\cdot(-x+4) + 3 > x^2 - x + 5$

$x^2 - 4x + 3 > x^2 - x + 5$

$-3x > 2$

$x < -\frac{2}{3}$

$R_1 = (-\infty, -\frac{2}{3})$

II) $0 \le x < 4$

$x(-(x-4)) + 3 > x^2 + (-(x+5))$

$x(-x+4) + 3 > x^2 + (-x+5)$

$-x^2 + 4x + 3 > x^2 - x + 5$

$-2x^2 + 5x - 2 > 0 \quad / \cdot(-1)$

$2x^2 - 5x + 2 < 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$

$x_1 = 2$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$R_2 = (\frac{1}{2}, 2)$

III) $4 \le x < 5$

$(x)\cdot(x-4) + 3 > x^2 + (-(x-5))$

$x^2 - 4x + 3 > x^2 - x + 5$

$x < -\frac{2}{3}$

$R_3 = \{\}$

IV) $x \ge 5$

$x\cdot(x-4) + 3 > x^2 + (x-5)$

$x^2 - 4x + 3 > x^2 + x - 5$

$-5x > -8$

$x < \frac{8}{5}$

$R_4 = \{\}$

$R = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{2}, 2)$

Mario Lamesic
93572573

20) $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$ $\quad \frac{2(n+1)+1}{2(n+1)-1} \leq \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{2n+2+1}{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n-1} \Big/ (2n+1)(2n-1)$

$= (2n+3)\cdot(2n-1) \leq (2n+1)\cdot(2n+1)$

$4n^2 + 6n - 2n - 3 \leq 4n^2 + 2n + 2n + 1$

$-3 \leq 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1 /:n}{2n-1 /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$ $\quad a = 1 \quad \varepsilon = \frac{1}{100}$

$|a_n - a| < \varepsilon$

$\left|\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{(2n-1)1} - \frac{2n-1}{(2n-1)1}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{2n+1-(2n-1)}{2n-1} < \frac{1}{100} \Longrightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{2n+1-2n+1}{2n-1}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{2}{2n-1}\right| < \frac{1}{100} \Longrightarrow \frac{2}{2n-1} < \frac{1}{100} \Rightarrow 200 < 2n-1$

$201 < 2n$

$\underline{n > 100{,}5}$

$\underline{M = 3 = a_1}$, nap. je padajoče

$\frac{2n+1 /:n}{2n-1 /:n} = \frac{2+n^{-1}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{2}{2} = 1 \quad \underline{m=1}$

---

21) $a_n = \frac{n+1}{2-3n}$ $\quad a_1 = -2,\ a_2 = -\frac{3}{4},\ a_3 = -\frac{4}{7}$

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1 /:n}{2-3n /:n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-3} = \frac{1}{-3} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$ $\quad |a_n - a| < \varepsilon$

$\left|\frac{n+1}{2-3n} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| < \frac{1}{1000} = \left|\frac{n+1}{2-3n} + \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{1000} = \left|\frac{3n+3}{(2-3n)3} + \frac{2-3n}{(2-3n)3}\right| < \frac{1}{1000} =$

$= \left|\frac{3n+3+2-3n}{(2-3n)3}\right| < \frac{1}{1000} = \left|\frac{5}{6-9n /(-1)}\right| < \frac{1}{1000} = \left|\frac{5}{-6+9n}\right| < \frac{1}{1000} =$

$= 5000 < -6+9n = 5006 < 9n \Longrightarrow n > 556{,}2$, od 557 člena dalje!

---

22) $a_n = \frac{n^2-1}{3n^2+1}$ $\quad a_1 = 0,\ a_2 = \frac{3}{13},\ a_3 = \frac{8}{28}$

$\frac{(n+1)^2-1}{3(n+1)^2+1} \leq \frac{n^2-1}{3n^2+1} = \frac{n^2+2n+1-1}{3(n^2+2n+1)+1} \leq \frac{n^2-1}{3n^2+1} = \frac{n^2+2n}{3n^2+6n+4} \leq \frac{n^2-1}{3n^2+1} \Big| (3n^2+6n+4)(3n^2+$

$= (n^2+2n)(3n^2+1) \leq (n^2-1)\cdot(3n^2+6n+4) = \cancel{3n^4} + \cancel{6n^3} + \cancel{n^2} + 2n \leq \cancel{3n^4} + \cancel{6n^3} + \cancel{4n^2} - 3n^2 - 6n - 4$

$= 8n \leq -4 = n \leq -\frac{1}{2}$ ni monotono!

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1 /:n}{3n^2+1 /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{3n^2}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$

---

23) $a_n = \frac{2n^2-1}{3n^2+2}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1 /:n}{3n^2+2 /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{3n^2}{n}+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

VRSTE

1. Dano je zaporedje $a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$. Določi delne vsote $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, dokaži, da je zaporedje delnih vsot s_n monotono in izračunaj vsoto vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
   R: $s_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -1$.

2. Pokaži, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+n}$ konvergentna. Nasvet: kvocientni kriterij.

3. Razišči konvergenco vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^n 1}{(2+\frac{1}{n})^n}$. R: konvergentna, Nasvet: korenski kriterij.

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^2}{(1+x^2)^n}$. Ali ta vrsta konvergira ali konvergira absolutno? R: Vrsta konvergira absolutno (torej tudi konvergira) za vsak x. Nasvet: kvocientni kriterij

5. Ugotovi, ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ konvergentna in če je, izračunaj njeno vsoto. R: $\frac{1}{4}$, Nasvet: razišči zaporedje delnih vsot, metoda nedoločenih koeficientov.

6. Dana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n n!}{n^n}$. Ali je vrsta absolutno konvergentna? Ali je vrsta konvergentna? R: vrsta ne konvergira, Nasvet: da pokažeš, da vrsta ne konvergira absolutno, uporabi kvocientni kriterij. Da pokažeš, da vrsta ne konvergira, pokaži, da členi vrste naraščajo.

7. Ugotovi ali je vrsta $1 + \frac{41}{81} + ... + \frac{4^n+5^n}{9^n} + ...$ konvergentna in če je, izračunaj njeno vsoto. R: $\frac{41}{20}$, Nasvet: vrsto zapiši kot vsoto dveh (konvergentnih) geometrijskih vrst.

8. Ugotovi ali konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$. R: divergira, Nasvet: kvocientni kriterij.

9. Ugotovi ali konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{4n}n}$. R: konvergira, Nasvet: korenski ali kvocientni kriterij.

ODVOD

Poišči odvode naslednjim funkcijam:

1. $f(x) = \frac{x^4}{4}(\ln^2 x - \ln\sqrt{x} + \frac{1}{8})$; R: $x^3 \ln^2 x$
2. $f(x) = (\arcsin x)^2$, R: $2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, R: $\frac{-1}{x^2+1}$

4. $f(x) = 6^{3x}$, R: $6^{3x} \ln 6 * 3$

5. $f(x) = \ln(\cos(x^4 + 4x))$, R: $-(4x^3 + 4) * \tan(x^4 + 4x)$

6. $f(x) = \arctan(n * \tan x)$, R: $\frac{n}{\cos^2 x + n^2 \sin^2 x}$

Poišči odvod (implicitno odvajaj) y':

1. $\sin x - \cos y = 0$, R: $-\frac{\cos x}{\sin x}$

2. $e^x \cos y - e^y \sin x = 0$, R: $\frac{e^x \cos y - e^y \cos x}{e^x \sin y + e^y \sin x}$

3. $y^2 - 2ye^x + 2x \ln y = 0$, R: $\frac{ye^x - \ln y}{y - e^x + \frac{x}{y}}$

Poišči odvod (logaritmično odvajaj) y' :

1. $y = x^{2x}$, R: $2x^{2x} \ln(xe)$

2. $y = \ln^x x$, R: $\ln^x x(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x})$

3. Poišči drugi odvod za funkcijo: $y = (x-2)e^{2x}$, R: $4e^{2x}(x-1)$

4. Poišči tretji odvod za funkcijo: $y = \arctan \frac{x}{a}$, $a = konst$, R: $\frac{2a(3x^2 - a^2)}{(a^2+x^2)^3}$

5. Pokaži, da funkcija $y = (\arcsin x)^2$ zadošča enačbi $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

Odvajaj parametrično podane funkcije:

1. $x = a\cos^2\varphi$, $y = b\sin^2\varphi$, R: $-\frac{b}{a}$

2. $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, R: $-\frac{1+\cos t}{\sin t}$

UPORABA ODVODA

1. Pokaži, da se krivulji $y = x - x^2$ in $y = x^2 - x$ sekata pravokotno.

2. Poišči enačbo tangente in enačbo normale za funkcijo $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ v sečišču z abscisno osjo. R: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = -2x + 2$

3. Za kakšno vrednost konstante a seka sinusoida $y = a \sin \frac{x}{b}$ os y pod kotom $\frac{\pi}{3}$? R: $a = \frac{b\sqrt{3}}{3}$

DIFERENCIAL

1. Funkcija je podana z enačbo $y = 4x^2 - 2x + 3$. Pri $x = 1$ in $\triangle x = 0,1$ izračunaj $\triangle y - dy$. R: $0,04$

2. Krogu s polmerom 1 m povečamo polmer za 1 cm. Za koliko se spremeni ploščina? R: $0,0201\pi$

3. Za koliko naj približno povečamo stranico $a_0 = 20\ cm$ enakorobne pravilne piramide, katere osnovna ploskev je kvadrat, da bi se prostornina povečala za 15 cm^3. R: $0,05\ cm$