FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

DEFINICIJSKO OBMOČJE, NIVOJNICE, PREREZI

1. Poišči in skiciraj definicijsko območje naslednjih funkcij:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, R: $D = \left\{(x,y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq 4\right\}$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, R: $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$
   (c) $z = \ln(x + y) \leq$, R: $D = \{(x,y) : y > -x\}$
   (d) $f(x,y) = \arcsin(2x - y)$, R: $D = \{(x,y) : 2x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$
   (e) $f(x,y) = \frac{1}{2 - x^2 - y^2}$, R: $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \neq 2\right\}$
   (f) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$, R: $D = \left\{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\right\}$
   (g) $f(x,y) = \ln(x \ln(y - x))$, R: $D = \{(x,y) : (x > 0 \wedge y > x + 1) \vee (0 < x < y < x + 1)\}$

2. Poišči def. območje funkcije $f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ter s pomočjo nivojnic nariši njen graf. R: $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, $x = 0, N_a : K_{\frac{1}{2a}}\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$, $N_{-a} : K_{\frac{1}{2a}}\left(-\frac{1}{2a}, 0\right)$

3. S pomočjo nivojnic nariši graf funkcije $f(x,y) = xy$, ter poišči prereza grafa nad premicama $y = x$ in $y = -x$. R: $x = 0, y = 0, N_a : y = \frac{a}{x}$, prereza: x^2, $-x^2$.

4. S pomočjo nivojnic predstavi graf funkcije $f(x,y) = y\left(x^2 - 1\right)$. Dodatno vprašanje: recimo, da se na grafu postavimo v točko $A(-2,1,3)$, radi pa bi prišli v točko $B(2,-1,-3)$. Ali znaš priti iz A v B tako, da se nikoli ne vzpenjaš?

PARCIALNI ODVODI:

1. Po definiciji izračunaj oba parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = x^2 + x - \frac{1}{y}$. R: $f_x = 2x + 1,\ f_y = \frac{1}{y^2}$

2. Danim funkcijam izračunaj parcialna odvoda:

   (a) $f(x,y) = x^2y^3 + x^3y$, R: $f_x = 2xy^3 + 3x^2y,\ f_y = x^2 3y^2 + x^3$
   (b) $f(x,y) = x \arctan\left(x^2 + y^2\right)$, R: $f_x = \arctan\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^2}{1 + (x^2 + y^2)^2}$, $f_y = \frac{2xy}{1 + (x^2 + y^2)^2}$
   (c) $f(x,y) = \left(x^2 - y^2 + 2x\right)^4$, R: $f_x = 4\left(x^2 - y^2 + 2x\right)^3 (2x + 2)$, $f_y = 4\left(x^2 - y^2 + 2x\right)^3 (-2y)$

3. Izračunaj parcialne odvode prvega in drugega reda:

(a) $f(x,y) = x\sin(x+y) + y\cos(x+y)$, R: $f_x = x\cos(x+y) + (1-y)\sin(x+y)$, $f_y = \cos(x+y)(1+x) - y\sin(x+y)$, $f_{xx} = (2-y)\cos(x+y) - x\sin(x+y)$, $f_{xy} = \sin(x+y)(-x-1) + (1-y)\cos(x+y)$, $f_{yy} = -(2+x)\sin(x+y) - y\cos(x+y)$

(b) $f(x,y) = \ln\left(x+y^2\right)$, R: $f_x = \frac{1}{x+y^2}$, $f_y = \frac{2y}{x+y^2}$, $f_{xx} = \frac{-1}{(x+y^2)^2}$, $f_{xy} = \frac{-2y}{(x+y^2)^2}$, $f_{yy} = \frac{2\left(x-y^2\right)}{(x+y^2)^2}$

(c) $f(x,y) = \frac{\cos x^2}{y}$, R: $f_x = \frac{-2x}{y}\sin x^2$, $f_y = \frac{-\cos x^2}{y^2}$, $f_{xx} = \frac{-2}{y}\left(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2\right)$, $f_{yy} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$, $f_{yx} = \frac{2x}{y^2}\sin x^2$

DIFERENCIAL

1. Izračunaj diferenciale naslednjih funkcij:

   (a) $u = \sin\left(x^2+y^2\right)$, R: $du = 2\cos\left(x^2+y^2\right)(xdx + ydy)$

   (b) $u = \arctan\frac{y}{x}$, R: $du = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$

   (c) $u = \ln\left(\tan\frac{y}{x}\right)$, R: $du = \frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}\left(-\frac{y}{x}dx + dy\right)$

2. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost $\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$. R: $0,005$

3. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost $1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3$. R: $108,972$

4. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost $\sin 29^\circ \tan 46^\circ$. R: $0,502$

5. Krožnemu izseku s polmerom 20 cm in središčnim kotom 60° povečamo kot za eno stopinjo. Za koliko moramo spremeniti polmer, da ostane ploščina izseka nespremenjena? R: Polmer moramo zmanjšati za $\frac{1}{6}$ cm.

6. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost $\left(1,02^3 + 1,97^3\right)^{\frac{1}{2}}$. R: $2,95$

POSREDNO ODVAJANJE:

TAYLORJEVA VRSTA:

1. Funkcijo $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ razvij po Taylorjevi formuli v okolici točke $(1,-2)$. R: $f(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(x+2) - (y+2)^2$

2. Razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke $(1,1)$ do reda 2 funkcijo $f(x,y) = x^y$. Izračunaj $1,03^{1,02}$. R: $f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1)$, $1,0306$

3. Za dano funkcijo poišči prve tri od 0 različne člene v Taylorjevi formuli: $f(x,y) = e^{xy}$. R: $e^{xy} = 1 + xy + \frac{x^2y^2}{2}$

4. Funkcijo $f(x,y,z) = 2x^2 - xy - xz + 2z + y^2$ razvij okrog točke $(1,-1,2)$ do reda 2. R: $f(x,y,z) = 6 + 3(x-1) - 3(y+1) + (z-2) + \frac{1}{2}\Big(4(x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 2(x-1)(y+1) - 2(x$ R_2

5. $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$. Razvij dano funkcijo v Taylorjevo vrsto okrog točke $(0,0)$ do členov reda 2. R. $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 + y^2 + xy + x^3 + y^3 + x^2y + y^2x + R_3$

EKSTREMI:

1. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. R: $(1,1)$ lokalni minimum

2. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 3by$. R: $(2a-b, 2b-a)$ lokalni minimum

3. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = \left(x^2 + \frac{3}{4}\right) e^{\left(-x^2-y^2\right)}$. R: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ in $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ lokalna maksimuma

4. $f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$. Dokaži, da ima ta funkcija neskončno mnogo maksimumov in niti enega lokalnega minimuma.

5. *V krog z danim radijem včrtaj trikotnik z največjo ploščino. R: enakostranični trikotnik

6. Poišči globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ na trikotniku, ki ga omejujejo premice $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 5$. R: glob. maks. v $(2,1)$, glob. min. v $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

7. Poišči in skiciraj definicijsko območje D funkcije $f(x,y) = \ln x + \ln y + \ln(5-x-y)$ ter poišči njene lokalne ekstreme. Kako je z globalnimi ekstremi na D? R: Lokalni in hkrati globalni maks. v $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

8. Zapiši definicijsko območje ter poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$. R: $D_f : x > 0,\ y > 0$, $(1,2)$ lok. min.

9. Število 75 razbij na vsoto treh pozitivnih števil tako, da bo njihov produkt največji. R: $25 + 25 + 25$

10. Dana je funkcija dveh spremenljivk

$$f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y,$$

$x > 0$, $y > 0$.

(a) Pokaži, da je
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{16}{x}=f(x,y)-\frac{x}{y}.$$

(b) Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme dane funkcije. R: min v $(4,2)$

VEZANI EKSTREMI:

1. Ploskev $z=f(x,y)=3-x-y$ naj ponazarja relief neke pokrajine. Poišči najvišje in najnižje ležečo točko na poti, katere projekcija na ravnino xy ima enačbo $x^2+xy+y^2=1$. R: min.:$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)$, maks.:$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$
2. Poišči ekstreme funkcije $f(x,y)=x+y^2$ nad krivuljo $2x^2+y^2=1$. R: min. v $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, maks. v $\left(\frac{1}{4},\pm\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$
3. Dokaži ali ovrzi: za poljubno točko na elipsoidu $x^2+2y^2+z^2=1$ velja $x+y+z\leq\frac{8}{5}$. R: Trditev drži, saj je glob.maks. funkcije $f(x,y,z)=x+y+z$ manjši kot $\frac{8}{5}$.
4. Med vsemi stožci, ki imajo površino 4π poišči tistega, ki ima največji volumen. R: $r=1$, $s=3$
5. Poišči globalne ekstreme funkcije $f(x,y)=3x^2-2xy+3y^2$ na krogu z enačbo $x^2+y^2\leq 4$. R: min. v $(0,0)$, maksimuma v $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ in $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.
6. Za koliko se lahko največ razlikujeta koordinati točke (x,y), če točka leži na elipsi $x^2+y^2+xy=1$. R: Za 2 enoti.
7. Poišči točke na elipsoidu $4x^2+3y^2+z^2=1$, ki so najbolj oz. najmanj oddaljene od točke $\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$. R: najbolj: $\left(\frac{1}{6},0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ in $\left(\frac{1}{6},0,-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, najmanj: $\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$. Nasvet: poišči ekstreme funkcije $f(x,y,z)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2$ pri pogoju $4x^2+3y^2+z^2-1=0$.
8. Ploskev $f(x,y)=3x^2-2xy+3y^2$ naj ponazarja relief neke pokrajine. Poišči najnižje ležečo točko na poti, katere projekcija na $xy-$ ravnino ima enačbo $x^3+y^3=1$. R: min: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, maks: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.
9. *V množici kvadrov z dano površino P poišči tistega z največjo prostornino. R: $a=b=c=\sqrt{\frac{P}{6}}$.
10. *Na elipsoidu, podanem z enačbo $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$, najdi točko, ki je najmanj (najbolj) oddaljena od ravnine $3x+4y+12z=288$. R: najmanj: $\left(-9,-\frac{1}{8},-\frac{3}{8}\right)$, najbolj: $\left(9,\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)$