

INTEGRALI
OSNOVE

1. $\int (3 - 2x) dx$, R: $3x - x^2 + C$
2. $\int 3\sqrt{x} dx$ R: $2x^{\frac{3}{2}} + C$
3. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ R: $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{x} + C$
4. $\int \frac{(x^2-1)^3}{x} dx$ R: $\frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - \ln x + C$
5. $\int (2^x - 4^x) dx$ R: $\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{4^x}{\ln 4} + C$
6. $\int (x^2 - 6x + 2) dx$ R: $\frac{x^5}{5} - 3x^2 + 2x + C$
7. $\int \frac{x^3-2x+6}{x} dx$ R: $\frac{x^3}{3} + 2x + 6 \ln |x| + C$
8. $\int \tan^2 x dx$ R: $\tan x - x + C$
9. $\int (2 \cos x - 3 \sin x) dx$ R: $2 \sin x + 3 \cos x + C$
10. $\int \frac{6x^2+4x+5}{2x^3+2x^2+5x+7} dx$ R: $\ln |2x^3 + 2x^2 + 5x + 7| + C$
11. $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x}\sqrt{x} dx$ R: $\frac{4}{7}x^{\frac{4}{7}} + x^{\frac{-1}{4}} + C$
12. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$ R: $x - \arctan x + C$, Nasvet: v števcu prištej in odštej 1
13. $\int 2^x 3^{x-2} dx$ R: $\frac{6^x}{9 \ln 6} + C$

UVEDBA NOVE SPREMENLJIVKE

1. $\int (4x - 3)^5 dx$ R: $\frac{1}{24}(4x - 3)^6 + C$
2. $\int \sqrt{5x - 6} dx$ R: $\frac{2}{15} \sqrt{(5x - 6)^3} + C$
3. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} dx$ R: $2\sqrt{x^2+3} + C$
4. $\int \frac{4x+6}{x^2+3x+2} dx$ R: $2 \ln |x^2 + 3x + 2| + C$
5. $\int \frac{5}{(x-3)^2} dx$ R: $\frac{-5}{x-3} + C$
6. $\int \frac{3}{x^2+6x+9} dx$ R: $\frac{-3}{x+3} + C$
7. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ R: $\frac{\ln^3 x}{3} + C$
8. $\int \sin^6 x \cos x dx$ R: $\frac{\sin^7 x}{7} + C$
9. $\int \sin(5x + 3) dx$ R: $\frac{-1}{5} \cos(5x + 3) + C$

10. $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx$ R: $\frac{-(x+1)^{-97}}{-97} - \frac{2(x+1)^{-98}}{98} - \frac{(x+1)^{-99}}{99} + C$
11. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ R: $\frac{1}{2} \arctan x^2 + C$
12. $\int \tan x dx$ R: $-\ln |\cos x| + C$
13. $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$ R: $-\operatorname{ctgx} - (\sin x)^{-1} + C$, Nasvet: števec in imenovalc pomnoži z $1 + \cos x$

PER PARTES

1. $\int \ln x dx$ R: $x(\ln x - 1) + C$
2. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ R: $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C$
3. $\int x^2 \sin 2x dx$ R: $\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right) \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C$
4. $\int x^3 e^x dx$ R: $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$
5. $\int e^x \sin x dx$ R: $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$
6. $\int x \arctan x dx$ R: $\frac{x^2}{2} \arctan x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \arctan x + C$
7. $\int x^2 \arccos x dx$ R: $\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

INTEGRALI RACIONALNIH FUNKCIJ

1. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4} dx$ R: $\ln |x^2 - 3x - 4| + C$
2. $\int \frac{2x+3}{x^2+1} dx$ R: $\ln |x^2 + 1| + 3 \arctan x + C$
3. $\int \frac{x^3+2x+4}{x^2+1} dx$ R: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + 4 \arctan x + C$
4. $\int \frac{4}{x^2-5x+6} dx$ R: $4 \ln |x - 3| - 4 \ln |x - 2| + C$
5. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$ R: $4 \ln |x - 1| - 7 \ln |x + 3| + 5 \ln |x - 4| + C$
6. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+3} dx$ R: $\ln(x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$
7. $\int \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2} dx$ R: $-\frac{1}{2} \ln |1 + x| + \frac{1}{4} \ln |1 + x^2| + \frac{x-1}{2(1+x^2)} + C$
8. $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$ R: $\frac{3}{8} \arctan x + \frac{3x^2+5}{8(x^2+1)^2} + C$

INTEGRIRANJE ALGEBRSKIH FUNKCIJ

1. $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$ R: $\frac{-(1-3x)^{\frac{4}{3}}}{4} + C$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+7}} dx$ R: $\ln \left(x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 6} \right) + C$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}} dx$ R: $\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x}|+C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} dx$ R: $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x+10}} dx$ R: $\arcsin\left(\frac{x-3}{\sqrt{19}}\right)+C$
6. $\int \frac{4x^2+x+3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ R: $(2x+1)\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$
7. $\int \sqrt{t^2+2t-1} dt$ R: $\frac{1}{2}(t+1)\sqrt{t^2+2t-1}-\ln(t+1+\sqrt{t^2+2t-1})+C$
8. $\int \frac{8x-10}{\sqrt{5-2x-x^2}} dx$ R: $-8\sqrt{5-2x-x^2}-19\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{6}}+C$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+6x+1}} dx$ R: $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(2x+3+\sqrt{4x^2+12x+2})+C$, Nasvet: ulomek razširi s $\sqrt{2}$.
10. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$ R: $6\left(\frac{(1+x)^{\frac{16}{6}}}{16}-\frac{2(1+x)^{\frac{10}{6}}}{10}+\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{(1+x)^{\frac{7}{6}}}{7}\right)+C$, Nasvet: nova sprem. $1+x=t^6$

INTEGRIRANJE KOTNIH FUNKCIJ

1. $\int \frac{1+2\cos x}{\sin x} dx$ R: $3\ln|\tan\frac{x}{2}|-2\ln|1+\tan^2\frac{x}{2}|+C$
2. $\int \frac{1}{2\sin^2+5\cos^2 x} dx$ R: $\frac{1}{\sqrt{10}} \arctan\left(\frac{2\tan x}{\sqrt{10}}\right)+C$
3. $\int \sin^5 x dx$ R: $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$
4. $\int \cos^6 x dx$ R: $\frac{1}{8}\left(x+\frac{3\sin 2x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{3\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin^3 2x}{6}\right)+C$
5. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$ R: $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{2\sin^5 x}{5}+\frac{\sin^7 x}{7}+C$
6. $\int \cos 4x \cos 2x dx$ R: $\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{\sin 2x}{4}+C$
7. $\int \sin x \cos 2x \sin 3x dx$ R: $\frac{1}{4}x-\frac{\sin 6x}{24}-\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+C$
8. $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$ R: $\frac{1}{4}\left(-\ln(1-\sin x)+\frac{1}{1-\sin x}+\ln(1+\sin x)-\frac{1}{1+\sin x}\right)+C$, Nasvet: ulomek razširi s $\cos x$, nato nova sprem. $t=\sin x$.

DOLOČENI INTEGRAL

1. $\int_1^8 \left(4\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$, R: 36
2. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$, R: 1

3. $\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx$, R: $\ln 3$
4. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$, R: $2 - \frac{\pi}{2}$
5. $\int_0^2 |1 - x| dx$, R: 1
6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+2\sin^2 x} dx$, R: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
7. ** Podan je integral $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$, $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da zanj velja rekurzijska formula $I_n = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n$. Nasvet: per partes, $u = x^{n+2}, \dots$
8. * $\int_{\frac{1}{2}}^2 (1 + x - \frac{1}{x}) e^{x+\frac{1}{x}} dx$, R: $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$
9. ** $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$, R: $\frac{\pi a^2}{4}$, Nasvet: nova spremenljivka $t : x = a \sin t$

PLOŠČINA LIKA

1. Izračunaj ploščino lika, omejenega s krivuljo $y = x^2 - 5x + 6$ in obema koordinatnima osema. R: $\frac{14}{3}$
2. Izračunaj ploščino zaprtega območja, omejenega s krivuljama $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. R: $\frac{125}{6}$
3. Izračunaj ploščino zaprtega območja, omejenega s krivuljama $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$, $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$. R: $8\sqrt{2}$
4. Izračunaj ploščino zaprtega območja, omejenega s krivuljami $y = |\ln x|$, $x = 0, 1$, $x = 10$, $y = 0$. R: $-8,01 + 9,9 \ln 10$
5. * Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje parabola $y^2 = 2x$ in krožnica $x^2 + y^2 = 8$. R: $2\pi - \frac{4}{3}$. Nasvet: območje razdeli na dve območji
6. Poišči ploščino območja, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x) = -2x + 7$, $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ in os x. R: $\frac{11}{3}$

Ploščina - polarne koordinate

1. Izračunaj ploščino lika, ki ga določa lemniskata $r^2 = 4 \cos 2\varphi$. R: 4
2. Izračunaj ploščino lika, ki ga določa krivulja $r = a \sin 3\varphi$. R: $\frac{a^2 \pi}{4}$

3. Izračunaj ploščino lika, ki ga določa krivulja $r = 2 \cos 4\varphi$. R: π

DOLŽINA LOKA KRIVULJE

1. Izračunaj dolžino loka na krivulji $y = \ln \sin x$ za $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$. R: $\ln 3$
2. Izračunaj dolžino loka krivulje $y = \frac{x^2}{4} - \ln \sqrt{x}$ na intervalu $[1, e]$ R: $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$
3. Izračunaj dolžino loka na krivulji $y = \ln x$ za $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{12}{5}$. R: $\frac{27}{20} + \ln 2$
4. Dana je funkcija $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \in [1, a]$. Dokaži, da je $p(a) + s(a) = af(a)$, kjer je $p(a)$ ploščina pod krivuljo za $1 \leq x \leq a$, $s(a)$ pa pomeni dolžino loka za $1 \leq x \leq a$.
5. Izračunaj dolžino loka parametrično podane krivulje od $t = 0$ do $t = \pi$:
 $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$. R: $\frac{\pi^3}{3}$

PROSTORNINA TELESA

1. Izračunaj prostornino rotacijskega telesa, ki ga dobimo, če se lik, omejen s krivuljami $xy = 4$, $x = 4$, $x = 1$, $y = 0$ zavrti okrog osi x . R: 12π
2. Izračunaj prostornino rotacijskega telesa, ki ga dobimo, če se lik, omejen s krivuljama $y = a - \frac{x^2}{a}$ in $x + y = a$ zavrti okoli osi y . R: $\frac{\pi a^3}{6}$
3. Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo, ko se elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ zavrti okoli osi x . R: $\frac{4}{3}\pi b^2 a$

POVRŠINA ROTACIJSKEGA TELESA

1. Graf funkcije $f(x) = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$ zavrtimo okrog abscisne osi. Izračunaj površino nastale vrtenine. R: $2\pi(\pi - \frac{4}{3})$. Nasvet: da določiš integracijske meje, poišči definicijsko območje.