MATEMATIKA 1, E-VS - vaje

PONOVITEV IZ SREDNJE ŠOLE:
(Literatura: knjige za srednjo šolo, zbirke nalog za pripravo na maturo; npr. Gorše Melita, Moja matematika 1,2,3, ...)

1 Linearna enačba, linearna funkcija, premica

1. Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi točko $A(3,-4)$ in ima smerni koeficient $k = 2$, v eksplicitni, implicitni in odsekovni (segmentni) obliki. R: $y = 2x - 10$, $2x - y - 10 = 0$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{-10} = 1$
2. Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi točki $A(3,-2)$ in $B(1,-1)$ v vseh treh oblikah. R: implicitna: $x + 2y + 1 = 0$
3. Reši enačbo $\frac{2x}{5} - 7 + 2x = \frac{2}{3} - x$. R:$\frac{115}{51}$
4. Nariši graf funkcije $y = -3x + 6$ tako, da jo preoblikuješ v segmentno obliko. Določi enačbo pravokotnice nanjo v točki $A(1,y)$. R: $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$, $x - 3y + 8 = 0$
5. Skiciraj graf linearne funkcije $y = 2x - 4$ in izračunaj razdaljo točke $A(-1,2)$ do dane premice. R: $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
6. Grafično in računsko reši enačbo $2x + y - 10 = 0$, ter navedi področja, kjer je funkcija pozitivna, negativna ter povej kje narašča oz. pada. R: $T(5,0)$, pozitivna za $x < 5$, negativna za $x > 5$, povsod pada
7. Reši enačbo $\frac{1}{4}(2x - 14) + \frac{1}{3}(3x + 9) = x$. R: $x = 1$
8. Dani sta točki $A(-3,1)$ in $B(1,-3)$. Poišči enačbo simetrale daljice AB. R: $y = x$
9. Poišči točko A', ki je simetrična točki $A(3,1)$ glede na premico $y = 2x+1$. R: $A'\left(-\frac{9}{5}, \frac{17}{5}\right)$

2 Manipulacija z algebrajskimi izrazi (poenostavljanje, faktoriziranje, krajšanje; kvadrat in kub dvočlenika, razlika kvadratov, razlika kubov, Vietove formule)

1. Izračunaj $\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$. R: 1
2. Skrči izraz $\frac{a-b}{c-d} - \frac{b-c}{d-c}$. R: $\frac{a-c}{c-d}$

3. Dokaži: $\left(\frac{x-3}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x-2} + \frac{6x}{x^3-8}\right)\left(5x + \frac{20}{x+2}\right) = \frac{-5}{x+2}$.

4. Skrči izraz: $\left(\frac{u+3}{u-3} - \frac{u-3}{u+3}\right) : \frac{3u}{u^2-9}$. R: 4

5. Krajšaj $\frac{a^{x+y}-a^y}{a^{2x}-a^x}$. R: a^{y-x}

6. Krajšaj: $\frac{ax^2-a^2x+x-a}{x^2-ax+3x-3a}$. R: $\frac{ax+1}{x+3}$

7. Kvadriraj: $(3a-b+2c)^2$. R: $9a^2+b^2+4c^2-6ab+12ac-4bc$

8. Izračunaj vrednost izraza: $\left(a^3+b^{-3}\right)\left(a+b^{-1}\right)^{-1}$ in premisli, pri katerih a in b sploh obstaja. R: $a^2-ab^{-1}+b^{-2}$, $b \neq 0$ in $a \neq -\frac{1}{b}$.

9. Zapiši kot produkt: $2x+84-2x^2$. R: $-2(x-7)(x+6)$

10. Razstavi: $p^2+2pq+q^2-r^2$. R: $(p+q-r)(p+q+r)$

11. Razstavi: $x^6+x^3y^3-x^4y^2-xy^5$. R: $x(x+y)^2(x-y)\left(x^2-xy+y^2\right)$

3 Računanje s potencami, koreni, eksponentne enačbe

1. Reši enačbo $\left(1-\left(1+x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} = 2$. R: $x=1$

2. Racionaliziraj: $\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$. R: $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$

3. Racionaliziraj: $\frac{3}{\sqrt[4]{2}+1}$. R: $3\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$

4. Racionaliziraj: $\sqrt{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{3}}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}}$. R: $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{3}\right)\sqrt{a-3}}{a-3}$

5. Izračunaj:

   (a) $\sqrt[6]{25^3}$. R: 5
   (b) $8\sqrt{7}-7\sqrt{7}+2\sqrt{7}-\sqrt{7}$. R: $2\sqrt{7}$
   (c) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$. R: $\sqrt{5}$
   (d) $\frac{b^{x-y-z}}{b^{x+y-z}}$. R: b^{-2y}
   (e) $\sqrt[n]{by^{n+2}}$. R: $y^2\sqrt[n]{by^2}$
   (f) $\sqrt[b]{y^2}\left(\sqrt[b]{y}\right)^{b-5}\left(\sqrt[b]{y}\right)^3$. R: y
   (g) $\frac{1}{m+n}\sqrt[3]{\frac{m^2+2mn+n^2}{m-n}}$. R: $\sqrt[3]{\frac{1}{m^2-n^2}}$

6. Določi vrednost izraza: $\sqrt{0.1^{-4}} \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^0 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-0,5} : \left(\frac{1}{0,81}\right)^{0,5}$. R: 40

7. Izračunaj $(1+x-y)^a(1+x+y)^a$. R: $\left((1+x)^2-y^2\right)^a$

8. Skrči izraz $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^{-1}$. R: $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

9. Reši enačbo: $3^{x-1}=1$. R: $x=1$

10. Reši enačbo: $9\cdot 3^{x+2}=27^x$. R: $x=2$

11. Poenostavi: $36^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}:6^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. R: $6^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

12. Z uporabo definicije logaritma reši enačbe:

    (a) $\log_{\frac{1}{3}}x=2$. R: $\frac{1}{9}$
    (b) $\log_x 4=-2$. R: $\frac{1}{2}$
    (c) $\log_{25}\sqrt{5}=x$. R: $\frac{1}{4}$
    (d) $32^{\log x}=0,25$. R: $\frac{1}{\sqrt[5]{100}}$

13. Reši logaritemsko enačbo: $\log(x-3)+\log(x+1)=\log(x+7)$. R: $x=5$

14. Logaritmiraj: $\log\frac{1}{\sqrt{a}}$. R: $-\frac{1}{2}\log a$

4 Kvadratna funkcija in kvadratna enačba

1. Reši enačbo: $-1=(x-2)(x+2)-(x-1)^2$. R: $x=2$

2. Načrtaj graf funkcije $y=-x^2+x+1$. R: $T\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$, ničli $(-0,6;0)$ in $(1,6;0)$

3. Nariši kvadratno funkcijo $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+1$.R: $T(-2,1)$, točka na ordinatni osi $A(0,3)$

4. Določi parameter a tako, da se bo parabola $y=a\left(x^2-5x+3\right)-\left(x^2-3-4x\right)$ dotikala osi x v eni sami točki. R: $a_1=2$, $a_2=\frac{14}{13}$

5. Zapiši enačbo kvadratne funkcije, katere graf ima teme $T(-2,3)$ in ima ničlo pri $x=4$. R: $y=-\frac{1}{12}(x+2)^2+3$

6. Vodilni koeficient kvadratne funkcije je -4. Ničli sta pri 2 in -1. Določi kvadratno funkcijo in teme te parabole. R: $y=-4(x-2)(x+1)$, T$\left(\frac{1}{2},9\right)$

7. Razdruži število 18 na dva člena tako, da bo njun produkt največji. R: $9+9$

8. Reši kvadratno enačbo: $x-(x+10)(x+x)^{-1}=2$. R: 4, -4

9. Izračunaj presečišča krivulj $y_1=3x^2-4x+3$ in $y_1=x^2+1$. R: $P(1,2)$

10. Zapiši tisto eksponentno funkcijo, $f(x)=a^x$, katere graf poteka skozi teme kvadratne funkcije $y=4x^2-4x+13$. R: teme $T\left(\frac{1}{2},12\right)$, $f(x)=144^x$

5 Preprosta geometrija: Pitagorov izrek, razdalja med točkama, kosinusni stavek

1. Reši sistem linearne in kvadratne enačbe $x^2 + y^2 = 25$ in $x + y = 7$ in rezultat interpretiraj grafično. R: presečišči $(4, 3)$ in $(3, 4)$

2. Obseg enakokrakega trikotnika je 86 cm, osnovnica pa 12 cm. Koliko meri krak trikotnika? R: 37 cm

3. V enačbi premice $\lambda x + 4y - 6 = 0$ določi parameter λ tako, da tvori premica s koordinatnima osema trikotnik s ploščino $4, 5$. R: $\lambda = 1$

4. V pravokotniku je prva stranica 24 cm, druga pa je za 8 cm krajša od diagonale. Izračunaj dolžino diagonale. R: 40 cm

5. V rombu meri obseg 82 m, ena diagonala pa 40 m. Izračunaj drugo diagonalo. R: 9 m

6. V pravokotnem trikotniku ($a = 24$, $b = 33$) izračunaj kota α in β. R: $\alpha = 29, 4$, $\beta = 60, 6$

7. Poenostavi: $(tg\alpha + ctg\alpha)^{-1}$. R: $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$

6 Sistemi 2×2 oz. 3×3 linearnih enačb (metoda nasprotnih koeficientov, izražanje ene neznanke z drugo)

1. Reši sistem enačb: $y = -3x + 2$ in $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$. R: $T(1, -1)$

2. Reši sistem enačb: $2x - 4y + 4 = 0$ in $2y - x - 1 = 0$. R: ni rešitev, premici sta vzporedni

3. Reši sistem enačb: $\frac{x}{2} + y = 4$ in $x + \frac{y}{3} = 3$. R: $(2, 3)$

4. Reši sistem enačb: $3x + 8y = 11$ in $12x + 32y = 44$. R: vse točke v ravnini

5. Izračunaj presečišče premic z enačbama $6x - y + 2 = 0$ in $2x - 2y - 1 = 0$. R: $T\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

6. Določi parametra m in n v sistemu enačb tako, da sta premici, ki ju določata enačbi, identični:
   $p_1 : (m - 2)\, x + 2y = 3n - 4m$
   $p_2 : nx + 5y = 4$
   R: $m = \frac{166}{35}$, $n = \frac{48}{7}$

7. Reši sistem enačb:
$2x - 3y + z = 0$
$x + y + z = 0$
$3x + y - z = 0$. R:$(0,0,0)$

7 Osnove trigonometrije: definicija kotnih funkcij in zveze med njimi

1. Poenostavi izraz in ga izračunaj za $x = \frac{5\pi}{6}$: $\left(\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\tan 2x}\right)^2$. R: $cos^2 2x$, $\frac{1}{4}$
2. Določi vse kote φ, za katere je $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}$.
3. Reši enačbo $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Reši enačbo $\sin^2 x = 2 - \cos x$.R: ni rešitve

8 Krožnica, elipsa, hiperbola, parabola

1. Zapiši enačbo krožnice, ki gre skozi točko $T\left(1,0\right)$ in ima središče $S\left(0,0\right)$. R: $x^2 + y^2 = 29$
2. Zapiši enačbo krožnice, ki gre skozi točko $T\left(1,0\right)$ in ima središče $S\left(-3,-2\right)$. R: $\left(x+3\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = 20$
3. Izračunaj središčno razdaljo krožnic: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ in $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$. R: $\sqrt{41}$
4. Skiciraj krivuljo, ki jo določa enačba $5x^2 + 9y^2 - 50x + 36y + 116 = 0$. R: elipsa $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{5} = 1$.
5. Zapiši enačbo hiperbole, če je $a = 2$ in $b = 1$.
6. Nariši parabolo $y^2 = 4x$.
7. Zapiši enačbo parabole z goriščem na osi $x$in temenom T v koordinatnem izhodišču, če gre skozi točko $T\left(\frac{3}{2},3\right)$. R: $y^2 = 6x$

9 IZJAVNI RAČUN, LOGIKA

1. Pravilno izjavo "3 je več kot 2" označimo z A, nepravilno izjavo "število 5 je sodo" pa z B. Naslednje sestavljene izjave izrazite z logičnimi znaki in ugotovite, katere od njih so pravilne:

   (a) 3 je več kot 2 in število 5 je sodo.

   (b) Če je 3 več kot 2, število 5 ni sodo.

   (c) Število 5 ni sodo ali pa 3 ni več kot 2.

   (d) Če je število 5 sodo, je 3 več kot 2.

   (e) Če je 3 več kot 2, potem je število 5 sodo.

   (f) 3 je več kot 2 če in samo če je število 5 sodo.

   (g) 3 je več kot 2 natanko tedaj, ko je število 5 sodo.

2. Naj bo A logično pravilna izjava. Kakšne so vrednosti izjav:

   (a) $A \vee B$

   (b) $\neg A \vee B$

   (c) $A \wedge B \Longleftrightarrow B$

   (d) $\neg A \vee B \Longleftrightarrow B$

3. S pravilnostnimi tabelami preverite, da so naslednje ekvivalence vedno pravilne, ne glede na pravilnost izjav A in B:

   (a) $A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \vee B$

   (b) $A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

   (c) $(A \Longleftrightarrow B) \Longleftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

   (d) $\neg (A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow A \wedge \neg B$

4. Zapiši negacijo izjav:

   (a) $A \wedge (\neg A \vee B)$. R: $\neg (A \wedge B)$

   (b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. R: N

5. Študent se je z mestnim avtobusom peljal na izpit. Rekel si je:"Če bo semafor pri Europarku zelen, bom naredil izpit." Ko je avtobus pripeljal na to križišče, na semaforju ni svetila zelena luč, študent pa si je dejal: "Presneto, spet bom padel." Ali njegov sklep velja?

10 MNOŽICE

1. Dane so množice $A = \left\{x \in \mathbb{R}; x^3 + x^2 - 2x = 0\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R}; e^{x^2-x} = 1 \vee x - 3 = 0\right\}$in $C = \left\{x \in \mathbb{R}; \log_x 9 = 2 \vee x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \vee 5 - x = 0\right\}$.
   (a) Zapiši elemente množic A, B, C.
   (b) Zapiši elemente množic $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A \setminus C) \cup B$, $(A \cup B \cup C) \setminus (B \cap C)$, $(C \setminus A) \cup (A \cap B)$, $(A \setminus B) \setminus (C \cup A)$.
   (c) Zapiši in grafično predstavi kartezična produkta $A \times B$ in $B \times A$.
   (d) Zapiši potenčno množico množice A. Izračunaj njeno moč.
2. Dana je univerzalna množica $U = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ in množice $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ in $C = \{7, 9\}$.
   (a) Za dane množice nariši Vennov diagram.
   (b) Zapiši elemente množic: A^C, B^C, C^C, $(A \cup B \cup C)^C$, $(A \cap B \cap C)^C$, $(B \setminus A)^C$.
3. Poenostavi izraza:
   (a) $A \cap \left(A^C \cup B\right)$. R: $A \cap B$
   (b) $\left(A^C \cap (A \cup B)\right)^C$. R: $A \cup B^C$
4. Poenostavi, pri pogoju, da je $A \subset B$:
   (a) $A \setminus B$. R: $\emptyset$
   (b) $A \cap \left(A^C \cup B^C\right)$. R: $\emptyset$
5. Določi množici $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ter $(A \cap B) \cap C$, če je $A = \{x; 0 < x < 2\}$, $B = \{x; 1 < x < 5\}$, $C = \{x; 4 \leq x \leq 10\}$.
6. Predstavi naslednje množice točk v pravokotnem koordinatnem sistemu in ugotovi, ali so točke $(0, 0)$, $(1, 0)$ in $(0, 1)$ njeni elementi:
   (a) $A = \{(x, y);\ x > 2y \wedge 2x + y > 0\}$
   (b) $B = \{(x, y);\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge -1 \leq y - x \leq 1 \wedge x + y \leq 1\}$
   (c) $C = \{(x, y);\ x \geq 0 \wedge y > 0 \wedge x^2 + y^2 < 1\}$.

11 NEENAČBE

1. Množico A zapiši z intervali:
   (a) $A = \{x; 2x < x + 1 < 2x - 1\}$. R: ni rešitve
   (b) $A = \left\{x; x \in \mathbb{R} \wedge \frac{x-4}{x+1} \geq 0\right\}$. R:$(-\infty, -1) \cup [4, \infty)$
2. Reši neenačbo: $-5^{2x+1} + 25 > 0$. R: $x < \frac{1}{2}$

12 ABSOLUTNA VREDNOST

V obsegu realnh števil reši naslednje enačbe oz. neenačbe:

1. $|2x+3|<4$, R: $(-\frac{7}{2},\frac{1}{2})$
2. $|x|-|x-4|>3$, R: $(\frac{7}{2},\infty)$
3. $|x+2|-|2x-6|-3<1-|x|$, R: $(-\infty,2)$
4. $|x+3|=|x-1|$, R: -1
5. $1\leq|x+3|\leq 2$, R: $[-5,-4]\cup[-2,-1]$
6. * $|1-|x-1||<1$, R: $(-1,3)\setminus\{1\}$
7. $\left|x^2+3x\right|-|x|<-3$, R: $\emptyset$
8. $|x-2|=|x+5|$, R: $-\frac{3}{2}$
9. * $\left|x^3-x^2\right|<\left|x^2+x\right|$, R: $\left(1-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,1+\sqrt{2}\right)$
10. $|2x+3|+|x+3|\leq 1$, R: $\emptyset$
11. $\left|\frac{x+2}{x-3}\right|>1$, R: $\left(\frac{1}{2},3\right)\cup(3,\infty)$

13 LOGARITMI

1. Reši enačbo: $\log_3 x=-2$. R: $\frac{1}{9}$
2. Reši enačbo: $\log_4 16=x$. R: 2
3. $\log x+\log(x+3)=\log(x-1)+\log(x+2)$. R: ni rešive; pazi na definicijsko območje logaritma!
4. $\log_2\sqrt[3]{x+1}-\log_2\sqrt[3]{9x+1}=-1$. R: $x=7$
5. Izračunaj: $\log_n\left(1+\sqrt{1-n}\right)+\log_n\left(1-\sqrt{1-n}\right)$. R: 1
6. $49^x-6\cdot 7^x+5=0$. R: $x=0$, $x=\log_7 5$. Pomoč: substitucija $7^x=a$.

14 MATEMATIČNA INDUKCIJA

S pomočjo matematične indukcije dokaži naslednje trditve:

1. $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1+3+...+(2n-1)=n^2$
3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$

4. $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (2n-2)2^n + 2$
5. $8 \left| (3^{2n+2} - 8n - 9) \right.$
6. $6 \left| 3n^2 + 9n + 6 \right.$
7. $6 \left| n(n+1)(2n+1) \right.$
8. $9 \mid 3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4$
9. $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$
10. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
11. $3 \left| (5^n + 2^{n+1}) \right.$
12. S pomočjo matematične indukcije preveri ali velja trditev: $6 \left| (3^n + 2 \cdot 5^{n+1} + 1) \right.$

15 KOMPLEKSNA ŠTEVILA

1. Razcepi v obsegu kompleksnih števil:
   (a) $z^2 + 36$. R: $(z + 6i)(z - 6i)$
   (b) $z^4 + 12z^2$. R: $z^2 \left(z + 2i\sqrt{3}\right)\left(z - 2i\sqrt{3}\right)$
2. Reši v obsegu kompleksnih števil:
   (a) $z^2 + 5 = 0$. R: $\pm i\sqrt{5}$
   (b) $z^2 - 4z + 13 = 0$. R: $2 \pm 3i$
3. Izračunaj:
   (a) $\left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - i\sqrt{2}\right) + (1 - 3i)^2$. R: $-3 - 6i$
   (b) $i^6 + i^{20} + i^{31} + i^{36} + i^{54} + i^5$. R: 0
   (c) $\frac{10}{2-i} + (1-i)^3 (1+i)^{10} - (1+i)^7$. R: $-68 + 74i$
4. Izračunaj $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ in $\frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}}$,če je $z = 3 - 4i$. R: $3, -4, 5, -\frac{4i}{13}$
5. Nariši množico kompleksnih števil, ki zadoščajo pogoju:
   (a) $\operatorname{Re} z > 1$
   (b) $\operatorname{Im} z = 3$
   (c) $|z| < 4$
   (d) $|z - 2| > 3$
   (e) $|z + 2i| \geq 2$
   (f) $|z + i - 1| < 3$

(g) $z\overline{z} = 4$

(h) $|z| + z = 2 + i$

(i) $|z - i| \leq 1 \wedge |z - 1| \leq 1$

6. Poišči realni števili x in y, ki zadoščata enačbi $(3 - i)\, x^2 - (3 + 2i)\, x - (1 - i)\, y = 13 - 10i$. R: 3 in 5 ter $\frac{-1}{2}$ in $\frac{-43}{4}$

7. V polarnem zapisu zapiši kompleksni števili $\alpha = -1 - i$ in $\beta = \sqrt{3} - 3i$

8. Izračunaj $(i + 1)^6$. R: $-8i$

9. Izračunaj: $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$.R: $\cos \frac{\frac{\pi}{4}+k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4}+k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$

10. Reši enačbo:

    (a) $z^6 + i = 0$.

    (b) $z^3 + 1 - i = 0$

    (c) * $z^2 - iz = |z - i|$. R: $i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

11. * Poišči množico točk v kompleksni ravnini, ki zadošča neenačbi: $|2z| < \left|1 + z^2\right|$.

12. * Reši enačbo $(\overline{z} - i)^3 = 1 - i$. R: $\sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{-\pi+8k\pi}{12} - i \sin \frac{-\pi+8k\pi}{12}\right) - i$; $k = 0, 1, 2$

16 ZAPOREDJA

1. Dano je zaporedje s splosnim členom $a_n = \frac{n+2}{2}$.

    (a) Poišči prvih nekaj členov.

    (b) Pokaži, da je zaporedje strogo padajoče.

    (c) Koliko členov zaporedja leži na $\left[\frac{5}{4}, 3\right]$? R: 8

    (d) Ali je število 1 člen zaporedja? R: ne

    (e) Poišči natančno zgornjo in natančno spodnjo mejo zaporedja. R: $M = 3$, $m = 1$

2. Pokaži, da je zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ omejeno. R: $|a_n| < 1$

3. Poišči splošni člen zaporedja:

    (a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$ R: $a_n = \frac{n}{n+1}$

    (b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4} ...$ R: $a_{2n-1} = \frac{n}{n+1}$, $a_{2n} = \frac{n+2}{n+1}$

4. Poišči stekališča zaporedja $a_n = 1 + \sin \frac{n\pi}{2}$ R: $0, 1, 2$

5. Poišči stekališča zaporedja $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ R: $-1, 1$

6. Poišči zaporedje s sedmimi stekališči. R: Npr. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, ...$

7. Poišči tako zaporedje, da je vsako naravno število njegovo stekališče. R: Npr. $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, ...$

8. Pri katerem aritmetičnem zaporedju je vsota 5. in 6. člena enaka 44, produkt teh dveh členov pa 480? R: $4, 8, 12, ...$ in $40, 36, 32, 28, ...$

9. Za kakšen x je dano končno zaporedje aritmetično: $\sqrt{x}, \sqrt{5x-4}, 3\sqrt{x}$? R. $x = 4$

10. Določi geometrijsko zaporedje, če je vsota četrtega in tretjega člena 504, razlika pa 360. R: $q = 0$, v tem primeru ne dobimo prave rešitve; $q = 6$, zaporedje: $2, 12, 72, 432, ...$

11. Dano je zaporedje $a_n = \frac{2n-7}{3n+2}$.

    (a) Pokaži, da je omejeno. R: $m = a_1 = -1$, zg. meja: npr 1 ali $\frac{2}{3}$

    (b) Pokaži, da je naraščajoče. R: pokaži, da je $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

    (c) Pokaži, da obstaja limita tega zaporedja.

    (d) Izračunaj njegovo limito. R: $\frac{2}{3}$

12. Koliko členov zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ leži izven intervala $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, če je $\varepsilon = 0,071$? R: 13 členov.

13. Izračunaj naslednje limite:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-4}{7n^n+n}$, R: $\frac{2}{7}$

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-5n^3}{1+2n^2}$, R: $-\infty$

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n-1}{n^3+2}$, R: 0

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^3+2n-1)$, R: ∞

    (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-3)(n^2-1)(n^2+7)}{(4n+3)^5}$, R: $\frac{1}{4^5}$

    (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt{9n+1}}$, R: $\frac{1}{3}$

    (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^3+3}}$, R: 1

    (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$, R: 1

    (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n+1}}$, R: $\frac{1}{3}$

    (j) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$, R: 1

    (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$, R: 0

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$, R: 0

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+...+n)}{n^3}$, R: $\frac{1}{6}$, Nasvet: Uporabi formuli $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ in $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ki ju za vajo lahko dokažeš z matematično indukcijo.

14. Zaporedje ima splošni člen $a_n = 2n-1$. Dokaži, da je aritmetično in zapiši prvih pet členov. R: prvih pet členov: $1, 3, 5, 7, 9$. Nasvet za dokaz: pokaži, da obstaja tako konstantno število d, da je $a_n = a_1 + (n-1)d$ za $\forall n \in \mathbb{N}$.

15. Podano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{3n-2}{4n+1}$. Pokaži, da je naraščajoče, omejeno, konvergentno in poišči njegovo limito. R: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$. Nasvet: pokaži, da je $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, $m = a_1 = \frac{1}{5}$, zg. meja: npr 1. Ker je zaporedje naraščajoče *in* navzgor omejeno, je konvergentno.

16. Pokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n^2-1}{3n^2+n+1}$ monotono in omejeno, ter izračunaj njegovo limito. Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon = \frac{1}{100}$? Nasvet: pokaži, da je $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, $m = a_1 = 0$, zg. meja: npr $\frac{1}{3}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno. Od 14. člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

17. V neskončnem padajočem geometrijskem zaporedju je prvi člen a_1. Vsota vseh členov tega zaporedja je $3a_1$. Poišči deseti člen tega zaporedja. R: $a_{10} = a_1 \left(\frac{2}{3}\right)^9$.

17 VRSTE

1. Dano je zaporedje $a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$. Določi delne vsote $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, dokaži, da je zaporedje delnih vsot s_n monotono in izračunaj vsoto vrste $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. R: $s_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = -1$.

2. Pokaži, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+n}$ konvergentna. Nasvet: kvocientni kriterij.

3. Razišči konvergenco vrste $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^n 1}{(2+\frac{1}{n})^n}$. R: konvergentna, Nasvet: korenski kriterij.

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^2}{(1+x^2)^n}$. Ali ta vrsta konvergira ali konvergira absolutno? R: Vrsta konvergira absolutno (torej tudi konvergira) za vsak x. Nasvet: kvocientni kriterij

5. Ugotovi, ali je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ konvergentna in če je, izračunaj njeno vsoto. R: $\frac{1}{4}$, Nasvet: razišči zaporedje delnih vsot, metoda nedoločenih koeficientov.

6. Dana je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n n!}{n^n}$. Ali je vrsta absolutno konvergentna? Ali je vrsta konvergentna? R: vrsta ne konvergira, Nasvet: da pokažeš, da vrsta ne konvergira absolutno, uporabi kvocientni kriterij. Da pokažeš, da vrsta ne konvergira, pokaži, da členi vrste naraščajo.

7. Ugotovi ali je vrsta $1+\frac{41}{81}+...+\frac{4^n+5^n}{9^n}+...$ konvergentna in če je, izračunaj njeno vsoto. R: $\frac{41}{20}$, Nasvet: vrsto zapiši kot vsoto dveh (konvergentnih) geometrijskih vrst.

8. Ugotovi ali konvergira vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$. R: divergira, Nasvet: kvocientni kriterij.

9. Ugotovi ali konvergira vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{4n} n}$. R: konvergira, Nasvet: korenski ali kvocientni kriterij.

18 PRESLIKAVE

1. Ugotovi, kateri izmed naslednjih predpisov so funkcije in kateri ne, ter utemelji zakaj:

   (a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $f(1) = b$, $f(2) = d$, $f(3) = b$.

   (b) A naj bo množica vseh ljudi, B pa množica vseh držav. $f(x) =$ država, katere državljan je x.

   (c) A naj bo množica državljanov Slovenije, B pa množica vseh držav. $f(x) =$EMŠO(x) .

   (d) A naj bo množica državljanov Slovenije, $B = \mathbb{N}$. $f(x) =$št. transakcijskega računa od x.

   (e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$.

   (f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) =$ tisti $x \in \mathbb{R}$, za katerega velja $x^2 = n$.

18.1 Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost

1. Ugotovi surjektivnost, injektivnost in bijektivnost naslednjih preslikav:

   (a) * $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f((n, m)) = n + m$.

   (b) $f : \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$

2. Naslednjim funkcijam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zoži definicijsko območje in zalogo vrednosti tako, da bodo postale bijektivne:

(a) $f(x) = |x|$
(b) $f(x) = \cos x$
(c) $f(x) = x^3 - x$.

Skiciraj graf funkcije $f(x) = |2x-1| + |2x+4|$. Ugotovi ali je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektivna ali surjektivna. Odgovore utemelji. R: ni surj.(npr. ne obstaja x z lastnostjo $f(x) = 3$), ni inj. (npr. $f(-1) = f(0)$).

18.2 Definicijsko območje, zaloga vrednosti

1. Določi definicijsko območje naslednjim funkcijam:

   (a) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$. R: $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$
   (b) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. R: $[-4, 4]$
   (c) $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$. R: $(-2, 2)$
   (d) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$. R: $[1, 4]$
   (e) * $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{2x}$. R: $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$
   (f) * $f(x) = \ln \ln \cos x$. R:$\emptyset$

18.3 Kompozitum

1. Zapiši kompozituma funkcij: $f \circ g$ in $g \circ f$, če sta f in g realni funkciji s predpisoma $f(x) = x^2$ in $g(x) = x + 3$.

2. * Določi definicijsko območje funkcije $\sqrt{f(g(f(x)))}$, če sta $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ in $g(x) = \frac{3}{x}$.

3. Zapiši kompozituma funkcij: $f \circ g$ in $g \circ f$, če sta f in g realni funkciji s predpisoma

   (a) $f(x) = \cos x + 1$ in $g(x) = x^2 + 5x + 2$,
   (b) $f(x) = e^x$ in $g(x) = \frac{-1}{x^2}$.

4. * Zapiši kompozituma funkcij: $f \circ g \circ h$ in $h \circ g \circ f$, za $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{-1}{x^2}$ ter $h(x) = \ln x^3$.

5. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Zapiši:

   (a) $f \circ f$
   (b) $f \circ f \circ f$

18.4 Inverzna funkcija

1. K dani funkciji poišči inverzno:$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$.

2. Naj bo $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Poišči predpis za f^{-1}. Kdaj le-ta obstaja (določi D_f in Z_f tako, da f^{-1} obstaja)? R: $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-1}$, $f^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

3. Naj bo $f(x) = 3\ln\left(\frac{3x-1}{4}\right) + 2$. Poišči predpis za f^{-1}. Kdaj le-ta obstaja (določi D_f in Z_f tako, da f^{-1} obstaja)? R: $f^{-1}(x) = \frac{1+4e^{\frac{x-2}{3}}}{3}$, $f : \left(\frac{1}{3}, \infty\right) \to \mathbb{R}$.

4. K danim funkcijam poišči inverzne:

   (a) $y = \frac{4x-5}{x-3}$. R: $y = \frac{3x-5}{x-4}$

   (b) $y = e^{3x} - 7$ R: $y = \frac{1}{3}\ln(x+7)$

   (c) $y = \frac{\cos x+1}{\cos x+2}$. R: $y = \arccos\frac{1-2x}{x-1}$

5. Naj bosta $f : \{a, b\} \to \{x, y, z\}$, $a \mapsto y$, $b \mapsto x$ in $g : \{x, y, z\} \to \{m, n, o\}$, $x \mapsto n$, $y \mapsto o$, $z \mapsto m$. Za funkciji f in g preveri, ali sta injektivni oz. surjektivni. Poišči (kadar to lahko) še $f \circ g$, $g \circ f$, Z_f, Z_g, g^{-1} in f^{-1}. Odgovore utemelji. R: f inj., f ni surj, $Z_f = \{x, y\}$, g bij., $Z_g = \{m, n, o\}$, f^{-1} ne obstaja, $f \circ g$ ne obstaja,...

18.5 Monotonost, omejenost, sodost in lihost, periodičnost

1. Določi intervale monotonosti za dano funkcijo:

   (a) $f(x) = \left|\frac{x+3}{x-1}\right|$. R: narašča na $(-3, 1)$, pada na $(-\infty, -3)$ in $(1, \infty)$

   (b) $f(x) = \sin x$. R: narašča na $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$,pada na $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

2. Ugotovi sodost oz. lihost dane funkcije:

   (a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. R: soda

   (b) $f(x) = -x^2 - 2|x| + 1$. R: soda

   (c) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. R: liha

   (d) $f(x) = \ln(2-x)$. R: ne soda, ne liha

   (e) $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. R: liha

   (f) * $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. R: liha

18.6 Pregled elementarnih funkcij

Nariši grafe naslednjih funkcij:

1. $y = -2(x-1)^2(x+1)$.
2. $y = x^3 - 2x + 2$. Pomoč: najprej nariši graf $y_1 = x^3 - 2x$ in upoštevaj premik
3. S pomočjo hornerjevega algoritma poišči ničle polinoma in ga skiciraj: $y = -2x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1$. R: ničle: 1 (2.stopnje), $-\frac{1}{2}, -1$
4. $y = \frac{(2x-3)^2}{x^2-3x+2}$. R: vodoravna asimptota $y = 4, ...$
5. $y = \frac{4x^2-4x}{2x-1}$. R: poševna asimptota $y = 2x - 1, ...$
6. $y = \frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$. R: asimptota $y = x - 4$, presečišče z asimptoto pri $x = -\frac{4}{3}$
7. $y = x^2 + \frac{1}{x}$. R: asimptota $y = x^2$
8. $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. R: točka nedoločenosti pri $x = 1$
9. $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| < 2 \\ 2x+1, & |x| > 2 \\ 2, & |x| = 2 \end{cases}$
10. $y = \sqrt{x+1}$
11. $y = \sqrt{-x+1}$
12. * $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$
13. S pomočjo inverzne funkcije nariši graf $y = \sqrt[3]{x+1}$.
14. $y = x^2 - 5|x| + 6$. R: $D_f = \mathbb{R}$, soda, ničle: $2, 3, -2, -3$, ni inj., ni surj.
15. Dana je funkcija $f(x) = e^x$. Nariši grafe funkcij:
    (a) $f_1(x) = -\frac{1}{2}e^x$
    (b) $f_2(x) = e^{2x}$
    (c) $f_3(x) = e^{x-1}$
16. Dana je funkcija $f(x) = \ln x$. Nariši grafe funkcij:
    (a) $f_1(x) = f(x) + 2$
    (b) $f_2(x) = |f(x)|$
    (c) $f_3(x) = \ln|x|$
17. $y = |\sin x|$

18. $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

19. $y = \arcsin x$

20. $y = e^{\sin x}$

21. $y = \ln(\cos x)$

22. $y = \ln(2x - 4)$

23. * $y = e^{x - \frac{1}{x}}$

24. * $y = 1 + \ln \frac{1}{x}$

25. * $y = \arcsin \frac{x-1}{x+1}$

26. $y = sgn\,(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

18.7 Limita funkcije

Izračunaj limite:

1. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$. R: -4

2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x-1}$. R: 3

3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. R: 2

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+4x}{3x^2+5x}$. R: $\frac{4}{5}$

5. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$. R: $\frac{-1}{3}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x-1}$. R: $\frac{5}{4}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$. R: 0

8. $*\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$. R: $\frac{49}{24}$

9. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$. R: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$. R: $2x$

11. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2-2x}{2x^2+1}$. R: $\frac{1}{2}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2}$. R: ∞

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-x^2+1}{3x^3-5x}$. R: $\frac{2}{3}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x}}{x}$. R: 1

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1}$. R: 1

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n+1}}$. R: $\frac{1}{3}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt{9n+1}}$. R: $\frac{1}{3}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$. R: 0

19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}$. R: 4

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$. R: 1

21. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$. R: 2

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x+\tan^2 x}{x}$. R: 1

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$. R: $\frac{\pi}{2}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$. R: $\frac{-1}{4}$

25. Izračunaj levo in desno limito funkcije $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$ v $x = 0$. R: $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$

26. Izračunaj $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x)$ in $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$, če je $f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ \left|x-\frac{\pi}{2}\right| & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$.
R: $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x)$ ne obstaja, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$.

27. Ali za funkcijo $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ obstaja limita v točki $x = 0$? R: ne

18.8 Zveznost

1. Ali lahko določimo a tako, da bo funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3+1} & x \ne 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ zvezna v točki $x = -1$? R: $a = -\frac{2}{3}$

2. Določi točke nezveznosti za funkcijo $f(x) = \begin{cases} e^x & x \le 0 \\ x-1 & 0 < x \le 1 \\ \ln x & x > 1 \end{cases}$. R: $x = 0$

19 ODVOD

Po definiciji izračunaj $f'(x)$:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, R: $-\frac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \sin x$, R: $\cos x$
3. $f(x) = 3x^2$, R: $6x$
4. $f(x) = 2x - 3$, R: 2

Poišči odvode naslednjim funkcijam:

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$, R: $6x^2 - 6x$
2. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, R: $x^2 - x^3$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, R: $\frac{2}{(x+1)^2}$
4. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, R: $\frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$
5. $f(x) = 2\sqrt{x}$, R: $\frac{1}{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = x\sqrt{x}$, R: $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
7. $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$, R: $x^2 e^x$
8. $f(x) = x \sin x$, R: $\sin x + x \cos x$
9. $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$, R: $x^2 \cos x$
10. $f(x) = x \ln x - x$, R: $\ln x$
11. $f(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$, R: $x^2 \ln x$
12. $f(x) = 2 \sin 6x$, R: $12 \cos 6x$
13. $f(x) = (3x + 8)^n$, R: $3n(3x + 8)^{n-1}$
14. $f(x) = e^{-3x}$, R: $-3e^{-3x}$
15. $f(x) = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $a = konst$, R: $-x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
16. $f(x) = \ln(x^3 + x)$, R: $\frac{3x^2+1}{x^3+x}$
17. $f(x) = \cos ax \sin bx$, a in b sta konstanti, R: $-a \sin ax \sin bx + b \cos ax \cos bx$
18. $f(x) = \ln tgx$, R: $\frac{1}{\sin x \cos x}$
19. $f(x) = \frac{x^4}{4}(\ln^2 x - \ln \sqrt{x} + \frac{1}{8})$; R: $x^3 \ln^2 x$
20. $f(x) = e^{2\sqrt{ax}}$, $a = konst$, R: $a(ax)^{-\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{ax}}$

21. $f(x) = \arcsin ax$, R: $\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$

22. $f(x) = (\arcsin x)^2$, R: $2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

23. $f(x) = \arccos(a - x)$, R: $\frac{1}{\sqrt{1-(a-x)^2}}$

24. $f(x) = arctg\frac{x+1}{x-1}$, R: $\frac{-1}{x^2+1}$

25. $f(x) = 6^{3x}$, R: $6^{3x} \ln 6 * 3$

26. $f(x) = \ln(\cos(x^4 + 4x))$, R: $-(4x^3 + 4) * tg(x^4 + 4x)$

27. $f(x) = \arctan(n * tgx)$, R: $\frac{n}{\cos^2 x+n^2 \sin^2 x}$

Poišči odvod (implicitno odvajaj) y':

1. $x^2 + y^2 - 25 = 0$, R: $y' = \frac{-x}{y}$
2. $\sin x - \cos y = 0$, R: $-\frac{\cos x}{\sin x}$
3. $\sin y - \sin(2y - x) = 0$, R: $\frac{\cos x}{2\cos(2y-x)} + \frac{1}{2}$
4. $y \sin x + x^2y^2 + a \cos y + b = 0$, R: $\frac{-y \cos x-2xy^2}{\sin x+2x^2y-a \sin y}$
5. $e^x \cos y - e^y \sin x = 0$, R: $\frac{e^x \cos y-e^y \cos x}{e^x \sin y+e^y \sin x}$
6. $y^2 - 2ye^x + 2x \ln y = 0$, R: $\frac{ye^x-\ln y}{y-e^x+\frac{x}{y}}$

Poišči odvod (logaritmično odvajaj) y' :

1. $y = \frac{(x-3)(x^2+5)}{(x+1)(x+4)}$, R: $\frac{(x-3)(x^2+5)}{(x+1)(x+4)} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+5} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right)$
2. $y = x^x$, R: $x^x(\ln x + 1)$
3. $y = x^{\ln x}$, R: $2x^{\ln x-1} \ln x$
4. $y = x^{2x}$, R: $2x^{2x} \ln(xe)$
5. $y = \ln^x x$, R: $\ln^x x(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x})$

Poišči drugi odvod za funkcije:

1. $y = x \ln x$, R: $12x^2 - 4$
2. $y = \sin^2 x$, R: $2 \cos 2x$
3. $y = (x - 2)e^{2x}$, R: $4e^{2x}(x - 1)$

Poišči tretji odvod za funkcije:

1. $y = x^2 \ln x$, R: $\frac{2}{x}$

2. $y = \arctan \frac{x}{a}$, $a = konst$, R: $\frac{2a(3x^2-a^2)}{(a^2+x^2)^3}$

3. Poišči četrti odvod funkcije $y = x \ln x$. R: $\frac{2}{x^3}$

4. Pokaži, da funkcija $y = (\arcsin x)^2$ zadošča enačbi $(1 - x^{2)}y'' - xy' = 2$.

Odvajaj parametrično podane funkcije:

1. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, R: $y' = -1$

2. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, R: $y' = \frac{t(2-t^{3)}}{1-2t^3}$

3. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, R: $\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$

4. $x = a \cos^2 \varphi$, $y = b \sin^2 \varphi$, R: $-\frac{b}{a}$

5. $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, R: $-\frac{1+\cos t}{\sin t}$

19.1 Uporaba odvoda

1. Zapiši enačbo tangente na krivuljo $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ v točki $x_0 = 1$. R: $y = 6x$

2. V kateri točki krivulje $y = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ oklepa tangenta z osjo x kot $\frac{\pi}{4}$? R: $T_1(1,1)$, $T_2(3,-1)$

3. Pokaži, da se krivulji $y = x - x^2$ in $y = x^2 - x$ sekata pravokotno.

4. Poišči enačbo tangente in enačbo normale za funkcijo $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ v sečišču z abscisno osjo. R: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = -2x + 2$

5. Za kakšno vrednost konstante a seka sinusoida $y = a \sin \frac{x}{b}$ os y pod kotom $\frac{\pi}{3}$? R: $a = \frac{b\sqrt{3}}{3}$

19.2 Diferencial

1. Funkcija je podana z enačbo $y = 4x^2 - 2x + 3$. Pri $x = 1$ in $\triangle x = 0,1$ izračunaj $\triangle y - dy$. R: $0,04$

2. Krogu s polmerom 1 m povečamo polmer za 1 cm. Za koliko se spremeni ploščina? R: $0,0201\pi$

3. Za koliko naj približno povečamo stranico $a_0 = 20$ cm enakorobne pravilne piramide, katere osnovna ploskev je kvadrat, da bi se prostornina povečala za 15 cm^3. R: $0,05$ cm

4. Oceni z diferencialom:
   (a) $(2,01)^5$
   (b) $\sqrt{8,99}$.

5. S pomočjo diferenciala določi približno spremembo funkcije $y = \arcsin(2x-1)$ v točki $x_0 = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$, če je $\triangle x = 0,01$.

19.3 L'hospitalovo pravilo

S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednje limite:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, R: 0
2. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$, R: 0
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$, R: $\frac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$, R: 3
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$, R: $-\frac{1}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$, R: $\frac{1}{2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$, R: 1

19.4 Taylorjeva vrsta

1. Razvij dano funkcijo v Taylorjevo vrsto oz. zapiši Taylorjevo formulo okoli $a = 2:\ f(x) = 2 + 3x - 5x^2 + 3x^3 + x^4$. R: $28 + 51(x-2) + 37(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + (x-2)^4$
2. Razvij dano funkcijo v Taylorjevo vrsto okoli $a = 0:\ f(x) = \sin x$. R: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$
3. Razvij funkcijo $f(x) = \ln(1+x)$ v Taylorjevo vrsto okoli $a = 0$. R: $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - ...$
4. Razvij $f(x) = 2^x$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$. R: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} x^n$
5. Z uporabo Taylorjeve vrste izračunaj limite:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, R: 1
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, R: 1
   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2\ln(1 + \frac{1}{x})\right)$, R: $\frac{1}{2}$
6. Funkcijo $f(x) = (1+x)\ln(1-x)$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. S pomočjo dobljenega razvoja izračunaj limito $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x + (1+x)\ln(1-x)}{x^2}$. Rezultat preveri z L'Hospitalovim pravilom. R: $f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{12}x^4 + ...\right)$, $-\frac{3}{2}$
7. Funkcijo $f(x) = \cos(2x-1)$ aproksimiraj s Taylorjevim polinomom 4. stopnje okrog točke $x_0 = \frac{1}{2}$. R: $1 - 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{2}{3}(x - \frac{1}{2})^4$

8. ** Napiši Taylorjevo vrsto za funkcijo $y = \ln(x+2)$ v točki $a = 1$ in ugotovi, za katere x je dobljena vrsta konvergentna. R: $\ln 3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n3^n}$, $-2 < x \leq 4$

9. ** Funkcijo $f(x) = 4\sin^2 x \cos x$ razvij v MacLaurinovo vrsto. R: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-3^{2n})x^{2n}}{(2n)!}$

10. **Funkcijo $f(x) = \sin(2x-1)$ aproksimiraj s Taylorjevim polinomom 5. stopnje okrog točke $x_0 = \frac{1}{2}$. Kako natančna je ta aproksimacija, če je $x \in [0,1]$. Oceni s pomočjo 7. odvoda. R: $2(x-\frac{1}{2}) + \frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^3 + \frac{4}{5}(x-\frac{1}{2})^5$, Rezultat je na tri decimalke pravilen, četrta decimalka je lahko napačna za 2.

19.5 Ekstremalni problemi

1. Tovarna izdeluje valjaste pločevinke z volumnom $2\pi\ l$. Kakšen naj bo polmer valja, da bo poraba materiala čim manjša? R: $r = 1$.

2. Imamo enakokraki trikotnik z osnovnico c in višino h. Včrtaj pravokotnik z osnovnico na stranici c tako, da bo ploščina največja. R: $x = \frac{c}{2}$, $y = \frac{h}{2}$. Nasvet: podobni trikotniki.

19.6 Risanje grafov s pomočjo odvoda

1. Nariši graf funkcije $y = (x^2-1)e^{-x^2}$ tako, da čim natančneje preučiš funkcijo. R: $D_f = \mathbf{R}$, ničli: ± 1, $T_1(0,-1)$ lok. min, $T_{2,3}(\pm\sqrt{2}, e^{-2})$ lok. maksimum, prevoji pri $x = \pm 1,78$ in $x = \pm 0,56$, funkcija narašča na $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$.

2. Preuči funkcijo (poišči definicijsko območje, ničle in pole, asimptote,ekstreme in prevoje) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.in nariši njen graf . R: $D_f : x > 0$, ničla pri $x = e^{-1}$, pol pri $x = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $T(1,1)$ lok. maks., prevoj pri $x = \sqrt{e}$.

3. Določi definicijsko območje, pole, asimptote, izračunaj prvi in drugi odvod, določi ekstreme funkcije $y = \frac{1}{-x^2+3}$ in nariši njen graf. R: $D_f = \mathbf{R} \backslash \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$, ničel ni, poli pri $x = \sqrt{3}$ in $x = -\sqrt{3}$, asimptota: $y = 0$, $T\left(0, \frac{1}{3}\right)$ lok. min.

4. Preuči funkcijo (poišči definicijsko območje, ničle, pole, asimptote, presečišče z osjo y, izračunaj prvi in drugi odvod in poišči ekstreme) $y = \frac{e^{x+1}}{x+2}$in nariši njen graf . R: $D_f = R \backslash \{2\}$, pol pri $x = -2$, $T(-1,1)$ lok.min. $y(0) = \frac{e}{2}$.

5. S pomočjo prvega odvoda nariši graf funkcije $y = \frac{x^2-1}{x^4+3}$. R: $D_f = R$, ničli: ± 1, asimptota $y = 0$, lok. ekstremi: $E_1\left(0, \frac{-1}{3}\right)$ lok.min, $E_1\left(\sqrt{3}, \frac{1}{6}\right)$ in $E_3\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{6}\right)$ lok.maksimuma.

6. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čimbolj natančno nariši graf funkcije $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ na intervalu $[0, 2\pi]$. R: $D_f = R$, $E_1\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ in $E_2\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ lok.minimuma, $E_3\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$ in $E_4\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$ lokalna maksimuma.

7. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in nariši graf funkcije $f(x) = x^2\sqrt{1 - \ln x}$. R: $D_f = (o, e]$, ničla: $x = e$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e} f(x) = 0$, $T(e^{\frac{3}{4}}; 2, 2)$ max.