ODVOD

Po definiciji izračunaj $f'(x)$:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, R: $-\frac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \sin x$, R: $\cos x$
3. $f(x) = 3x^2$, R: $6x$
4. $f(x) = 2x - 3$, R: 2

Poišči odvode naslednjim funkcijam:

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$, R: $6x^2 - 6x$
2. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, R: $x^2 - x^3$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, R: $\frac{2}{(x+1)^2}$
4. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, R: $\frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$
5. $f(x) = 2\sqrt{x}$, R: $\frac{1}{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = x\sqrt{x}$, R: $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
7. $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$, R: $x^2 e^x$
8. $f(x) = x \sin x$, R: $\sin x + x \cos x$
9. $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$, R: $x^2 \cos x$
10. $f(x) = x \ln x - x$, R: $\ln x$
11. $f(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$, R: $x^2 \ln x$
12. $f(x) = 2 \sin 6x$, R: $12 \cos 6x$
13. $f(x) = (3x + 8)^n$, R: $3n(3x + 8)^{n-1}$
14. $f(x) = e^{-3x}$, R: $-3e^{-3x}$
15. $f(x) = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $a = konst$, R: $-x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
16. $f(x) = \ln(x^3 + x)$, R: $\frac{3x^2+1}{x^3+x}$
17. $f(x) = \cos ax \sin bx$, a in b sta konstanti, R: $-a \sin ax \sin bx + b \cos ax \cos bx$
18. $f(x) = \ln tgx$, R: $\frac{1}{\sin x \cos x}$
19. $f(x) = \frac{x^4}{4}(\ln^2 x - \ln \sqrt{x} + \frac{1}{8})$; R: $x^3 \ln^2 x$
20. $f(x) = e^{2\sqrt{ax}}$, $a = konst$, R: $a(ax)^{-\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{ax}}$
21. $f(x) = \arcsin ax$, R: $\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$
22. $f(x) = (\arcsin x)^2$, R: $2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
23. $f(x) = \arccos(a - x)$, R: $\frac{1}{\sqrt{1-(a-x)^2}}$
24. $f(x) = arctg \frac{x+1}{x-1}$, R: $\frac{-1}{x^2+1}$
25. $f(x) = 6^{3x}$, R: $6^{3x} \ln 6 * 3$

26. $f(x) = \ln(\cos(x^4 + 4x))$, R: $-(4x^3 + 4) * tg(x^4 + 4x)$
27. $f(x) = \arctan(n * tgx)$, R: $\frac{n}{\cos^2 x + n^2 \sin^2 x}$

Poišči odvod (implicitno odvajaj) y':

1. $x^2 + y^2 - 25 = 0$, R: $y' = \frac{-x}{y}$
2. $\sin x - \cos y = 0$, R: $-\frac{\cos x}{\sin x}$
3. $\sin y - \sin(2y - x) = 0$, R: $\frac{\cos x}{2\cos(2y-x)} + \frac{1}{2}$
4. $y \sin x + x^2y^2 + a\cos y + b = 0$, R: $\frac{-y\cos x - 2xy^2}{\sin x + 2x^2y - a\sin y}$
5. $e^x \cos y - e^y \sin x = 0$, R: $\frac{e^x \cos y - e^y \cos x}{e^x \sin y + e^y \sin x}$
6. $y^2 - 2ye^x + 2x\ln y = 0$, R: $\frac{ye^x - \ln y}{y - e^x + \frac{x}{y}}$

Poišči odvod (logaritmično odvajaj) y' :

1. $y = \frac{(x-3)(x^2+5)}{(x+1)(x+4)}$, R: $\frac{(x-3)(x^2+5)}{(x+1)(x+4)} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+5} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right)$
2. $y = x^x$, R: $x^x(\ln x + 1)$
3. $y = x^{\ln x}$, R: $2x^{\ln x - 1} \ln x$
4. $y = x^{2x}$, R: $2x^{2x} \ln(xe)$
5. $y = \ln^x x$, R: $\ln^x x(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x})$

Poišči drugi odvod za funkcije:

1. $y = x\ln x$, R: $12x^2 - 4$
2. $y = \sin^2 x$, R: $2\cos 2x$
3. $y = (x - 2)e^{2x}$, R: $4e^{2x}(x - 1)$

Poišči tretji odvod za funkcije:

1. $y = x^2 \ln x$, R: $\frac{2}{x}$
2. $y = \arctan \frac{x}{a}$, $a = konst$, R: $\frac{2a(3x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2)^3}$
3. Poišči četrti odvod funkcije $y = x\ln x$. R: $\frac{2}{x^3}$
4. Pokaži, da funkcija $y = (\arcsin x)^2$ zadošča enačbi $(1 - x^{2)}y'' - xy' = 2$.

Odvajaj parametrično podane funkcije:

1. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, R: $y' = -1$
2. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, R: $y' = \frac{t(2-t^{3)}}{1-2t^3}$
3. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, R: $\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$
4. $x = a\cos^2 \varphi$, $y = b\sin^2 \varphi$, R: $-\frac{b}{a}$
5. $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, R: $-\frac{1+\cos t}{\sin t}$

UPORABA ODVODA

1. Zapiši enačbo tangente na krivuljo $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ v točki $x_0 = 1$. R: $y = 6x$

2. V kateri točki krivulje $y = x^3 - 6x + 10x - 4$ oklepa tangenta z osjo x kot $\frac{\pi}{4}$? R: $T_1(1,1)$, $T_2(3,-1)$

3. Pokaži, da se krivulji $y = x - x^2$ in $y = x^2 - x$ sekata pravokotno.

4. Poišči enačbo tangente in enačbo normale za funkcijo $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ v sečišču z abscisno osjo. R: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = -2x + 2$

5. Za kakšno vrednost konstante a seka sinusoida $y = a \sin \frac{x}{b}$ os y pod kotom $\frac{\pi}{3}$? R: $a = \frac{b\sqrt{3}}{3}$

DIFERENCIAL

1. Funkcija je podana z enačbo $y = 4x^2 - 2x + 3$. Pri $x = 1$ in $\triangle x = 0,1$ izračunaj $\triangle y - dy$. R: $0,04$

2. Krogu s polmerom $1\ m$ povečamo polmer za $1\ cm$. Za koliko se spremeni ploščina? R: $0,0201\pi$

3. Za koliko naj približno povečamo stranico $a_0 = 20\ cm$ enakorobne pravilne piramide, katere osnovna ploskev je kvadrat, da bi se prostornina povečala za $15\ cm^3$. R: $0,05\ cm$

L'HOSPITALOVO PRAVILO
S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednje limite:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$, R: 0

2. $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$, R: 0

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$, R: $\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$, R: 3

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$, R: $-\frac{1}{3}$

6. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$, R: $\frac{1}{2}$

TAYLORJEVA VRSTA
1. STOPNJA

1. Razvij dano funkcijo v Taylorjevo vrsto oz. zapiši Taylorjevo formulo okoli $a = 2:\ f(x) = 2 + 3x - 5x^2 + 3x^3 + x^4$. R: $28 + 51(x-2) + 37(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + (x-2)^4$

2. Razvij dano funkcijo v Taylorjevo vrsto okoli $a = 0:\ f(x) = \sin x$. R: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$

3. Razvij funkcijo $f(x) = \ln(1 + x)$ v Taylorjevo vrsto okoli $a = 0$. R: $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - ...$

4. Razvij $f(x) = 2^x$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$. R: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} x^n$

5. Z uporabo Taylorjeve vrste izračunaj limite:
   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, R: 1
   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, R: 1
   (c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \right)$, R: $\frac{1}{2}$

6. Funkcijo $f(x) = (1 + x)\ln(1 - x)$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. S pomočjo dobljenega razvoja izračunaj limito $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + (1+x)\ln(1-x)}{x^2}$. Rezultat preveri z L'Hospitalovim pravilom. R: $f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{12}x^4 + ... \right)$, $-\frac{3}{2}$

7. Funkcijo $f(x)=\cos(2x-1)$ aproksimiraj s Taylorjevim polinomom 4. stopnje okrog točke $x_0=\frac{1}{2}$. R: $1-2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})^4$

8. ** Napiši Taylorjevo vrsto za funkcijo $y=\ln(x+2)$ v točki $a=1$ in ugotovi, za katere x je dobljena vrsta konvergentna. R: $\ln 3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n3^n}$, $-2<x\leq 4$

9. ** Funkcijo $f(x)=4\sin^2 x\cos x$ razvij v MacLaurinovo vrsto. R: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-3^{2n})x^{2n}}{(2n)!}$

10. **Funkcijo $f(x)=\sin(2x-1)$ aproksimiraj s Taylorjevim polinomom 5. stopnje okrog točke $x_0=\frac{1}{2}$. Kako natančna je ta aproksimacija, če je $x\in[0,1]$. Oceni s pomočjo 7. odvoda. R: $2(x-\frac{1}{2})+\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^3+\frac{4}{5}(x-\frac{1}{2})^5$, Rezultat je na tri decimalke pravilen, četrta decimalka je lahko napačna za 2.

EKSTREMALNI PROBLEMI

1. Tovarna izdeluje valjaste pločevinke z volumnom 2π l. Kakšen naj bo polmer valja, da bo poraba materiala čim manjša? R: $r=1$.

2. Imamo enakokraki trikotnik z osnovnico c in višino h. Včrtaj pravokotnik z osnovnico na stranici c tako, da bo ploščina največja. R: $x=\frac{c}{2}$, $y=\frac{h}{2}$. Nasvet: podobni trikotniki.

RISANJE GRAFOV S POMOČJO ODVODA

1. Nariši graf funkcije $y=(x^2-1)e^{-x^2}$ tako, da čim natančneje preučiš funkcijo. R: $D_f=\mathbf{R}$, ničli: ±1, $T_1(0,-1)$ lok. min, $T_{2,3}(\pm\sqrt{2},e^{-2})$ lok. maksimum, prevoji pri $x=\pm1,78$ in $x=\pm0,56$, funkcija narašča na $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$.

2. Preuči funkcijo (poišči definicijsko območje, ničle in pole, asimptote,ekstreme in prevoje) $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$.in nariši njen graf . R: $D_f\,:\,x>0$, ničla pri $x=e^{-1}$, pol pri $x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$, $T(1,1)$ lok. maks., prevoj pri $x=\sqrt{e}$.

3. Določi definicijsko območje, pole, asimptote, izračunaj prvi in drugi odvod, določi ekstreme funkcije $y=\frac{1}{-x^2+3}$ in nariši njen graf. R: $D_f=\mathbf{R}\backslash\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$, ničel ni, poli pri $x=\sqrt{3}$ in $x=-\sqrt{3}$, asimptota: $y=0$, $T\left(0,\frac{1}{3}\right)$ lok. min.

4. Preuči funkcijo (poišči definicijsko območje, ničle, pole, asimptote, presečišče z osjo y, izračunaj prvi in drugi odvod in poišči ekstreme) $y=\frac{e^{x+1}}{x+2}$in nariši njen graf . R: $D_f=slR\backslash\{2\}$, pol pri $x=-2$, $T(-1,1)$ lok.min. $y(0)=\frac{e}{2}$.

5. S pomočjo prvega odvoda nariši graf funkcije $y=\frac{x^2-1}{x^4+3}$. R: $D_f=slR$, ničli: ±1, asimptota $y=0$, lok. ekstremi: $E_1\left(0,\frac{-1}{3}\right)$ lok.min, $E_1\left(\sqrt{3},\frac{1}{6}\right)$ in $E_3\left(-\sqrt{3},\frac{1}{6}\right)$ lok.maksimuma.

6. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čimbolj natančno nariši graf funkcije $f(x)=\sin x+\cos^2 x$ na intervalu $[0,2\pi]$. R: $D_f=slR$, $E_1\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ in $E_2\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$ lok.minimuma, $E_3\left(\frac{\pi}{6},\frac{5}{4}\right)$ in $E_4\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5}{4}\right)$ lokalna maksimuma.

7. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in nariši graf funkcije $f(x)=x^2\sqrt{1-\ln x}$. R: $D_f=(o,e]$, ničla: $x=e$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to e}f(x)=0$, $T(e^{\frac{3}{4}};2,2)$ max.