ZAPOREDJA

1. Zapiši splošni člen zaporedja: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$ R: $a_n = \frac{n}{n+1}$

2. Zapiši splošni člen zaporedja: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, ...$ R: $a_{2n-1} = \frac{n}{n+1}, a_{2n} = \frac{n+2}{n+1}$

3. Pokaži,da je zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ omejeno. R: $|a_n| < 1$.

4. Poišči stekališča naslednjega zaporedja: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. R: stekališči sta 1 in -1.

5. Poišči primer zaporedja s sedmimi stekališči. R: Npr. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, ...$

6. Poišči primer takega zaporedja, da bo vsako naravno število njegovo stekališče. R: Npr. $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, ...$

7. Pokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ naraščajoče in omejeno. Izračunaj tudi njegovo limito. R: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$. Nasvet: pokaži, da je $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, $m = a_1 = -1$, zg. meja: npr 1 ali $\frac{2}{3}$.

8. Za kakšen x je dano končno zaporedje aritmetično: $\sqrt{x}, \sqrt{5x-4}, 3\sqrt{x}$? R: $x = 4$, zaporedje: $2, 4, 6$.

9. Določi geometrijsko zaporedje, če je vsota četrtega in tretjega člena 504, razlika pa 360. R: $q = 0$, v tem primeru ne dobimo prave rešitve; $q = 6$, zaporedje: $2, 12, 72, 432, ...$

10. Koliko členov zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ leži izven intervala $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, če je $\varepsilon = 0,071$? R: 13 členov.

11. Izračunaj naslednje limite:

    (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-4}{7n^n+n}$, R: $\frac{2}{7}$

    (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n-5n^3}{1+2n^2}$, R: $-\infty$

    (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n-1}{n^3+2}$, R: 0

    (d) $\lim_{n\to\infty} (n^3 + 2n - 1)$, R: ∞

    (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-3)(n^2-1)(n^2+7)}{(4n+3)^5}$, R: $\frac{1}{4^5}$

    (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt{9n+1}}$, R: $\frac{1}{3}$

    (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^3+3}}$, R: 1

    (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$, R: 1

    (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n+1}}$, R: $\frac{1}{3}$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$, R: 1

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$, R: 0

(l) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$, R: 0

(m) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+...+n)}{n^3}$, R: $\frac{1}{6}$, Nasvet: Uporabi formuli $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ in $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ki ju za vajo lahko dokažeš z matematično indukcijo.

12. Zaporedje ima splošni člen $a_n=2n-1$. Dokaži, da je aritmetično in zapiši prvih pet členov. R: prvih pet členov: $1,3,5,7,9$. Nasvet za dokaz: pokaži, da obstaja tako konstantno število d, da je $a_n=a_1+(n-1)d$ za $\forall n\in\mathbb{N}$.

13. Podano je zaporedje s splošnim členom $a_n=\frac{3n-2}{4n+1}$. Pokaži, da je naraščajoče, omejeno, konvergentno in poišči njegovo limito. R: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$. Nasvet: pokaži, da je $a_{n+1}\geq a_n,\forall n\in\mathbb{N}$, $m=a_1=\frac{1}{5}$, zg. meja: npr 1. Ker je zaporedje naraščajoče *in* navzgor omejeno, je konvergentno.

14. Pokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n=\frac{n^2-1}{3n^2+n+1}$ monotono in omejeno, ter izračunaj njegovo limito. Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon=\frac{1}{100}$? Nasvet: pokaži, da je $a_{n+1}\geq a_n,\forall n\in\mathbb{N}$, $m=a_1=0$, zg. meja: npr $\frac{1}{3}$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$ Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno. Od 14. člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon=\frac{1}{100}$.

15. V neskončnem padajočem geometrijskem zaporedju je prvi člen a_1. Vsota vseh členov tega zaporedja je $3a_1$. Poišči deseti člen tega zaporedja. R: $a_{10}=a_1\left(\frac{2}{3}\right)^9$.