MATEMATIČNI UVOD

VEKTORJI

1. Zapis vektorja v prostoru

Vzemimo vektor $\vec{a}$ v *x*, *y*, *z* koordinatnem prostoru. Posamezne komponente vektorja so:

$$\boxed{\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)},$$

pri čemer je a_x, projekcija vektorja na *x*-os, a_y je projekcija vektorja na *y*-os in a_z je projekcija vektorja na *z*-os.

Dolžina vektorja $\vec{a}$ je:

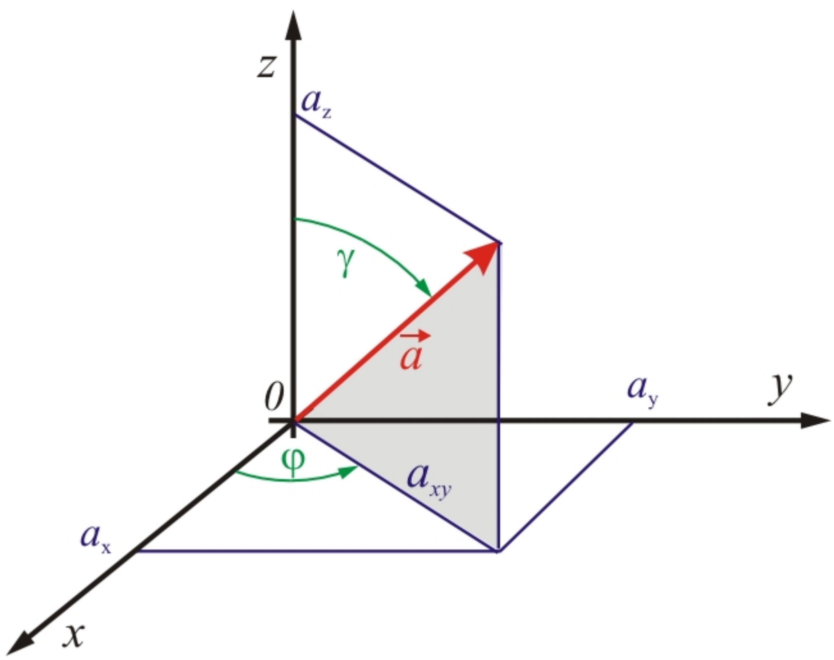
$$\boxed{a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

V prostoru lahko vektor $\vec{a}$ zapišemo tudi z njegovo dolžino $a = |\vec{a}|$, kotom φ in kotom γ. Kot φ je kot med *x*-osjo in projekcijo vektorja $\vec{a}$ v *xy* ravnino (a_{xy}), kot γ pa je kot med *z*-osjo in vektorjem $\vec{a}$. Vektor $\vec{a}$ lahko torej zapišemo kot:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_{xy}\cos(\varphi), a_{xy}\sin(\varphi), a\cos(\gamma)).$$

V kolikor upoštevamo, da je $a_{xy} = a\sin(\gamma)$, lahko zapišemo vektor $\vec{a}$ kot:

$$\boxed{\vec{a} = a(\sin(\gamma)\cos(\varphi), \sin(\gamma)\sin(\varphi), \cos(\gamma))}$$



2. Seštevanje in odštevanje vektorjev

Posamezne vektorje v prostoru seštevamo oziroma odštevamo tako, da seštejemo oziroma seštejemo posamezne komponente vektorja.

Vzemimo tri poljubne vektorje v *x*, *y*, *z* koordinatnem sistemu:

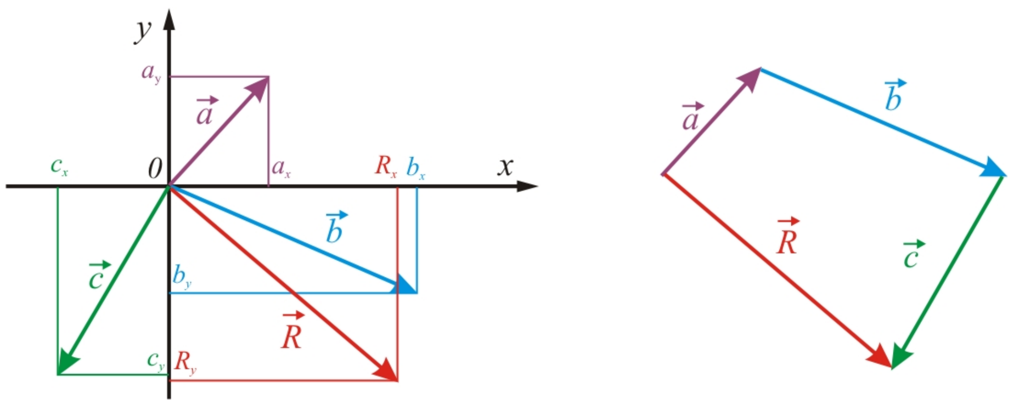
$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)\,,$$
$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)\,,$$
$$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)\,.$$

Zapišimo vsoto vektorjev kot $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, pri čemer je:

$$\vec{R} = (a_x + b_x + c_x,\, a_y + b_y + c_y,\, a_z + b_z + c_z)\,.$$

Podobno velja tudi za odštevanje vektorjev, kjer posamezne komponente odštejemo.

primer 1: Kot primer vzemimo tri vektorje v *x*, *y*, koordinatnem sistemu:
$\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ in $\vec{c} = (c_x, c_y)$ (glej sliko).
Vsoto vektorjev je $\vec{R} = (R_x, R_y) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, pri čemer je:
$\vec{R} = (R_x, R_y) = (a_x + b_x + c_x,\, a_y + b_y + c_y)$



primer 2: Vektor $\vec{F}$ se nahaja v *x*, *y* koordinatnem sistemu. Velikost vektorja $\vec{F}$ je F=5 (enot), z *x*-osjo pa oklepa kot φ=30^0. Kolikšni sta posamezni komponenti vektorja v *x*-os in *y*-osi?

$$\vec{F} = (F_x, F_y) = (F\cos(\varphi), F\sin(\varphi))\,.$$

3. Skalarni produkt dveh vektorjev

Skalarni produkt vektorja $\vec{a}$ z vektorjem $\vec{b}$ zapišemo kot:

$$\boxed{c = \vec{a} \cdot \vec{b}},$$

pri čemer je c skalar in je enak produktu dolžine vektorja $\vec{a}$ in pravokotne projekcije vektorja $\vec{b}$ na smer vektorja $\vec{a}$. Skalarni produkt $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ lahko torej zapišemo kot:

$$\boxed{c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\varphi)},$$

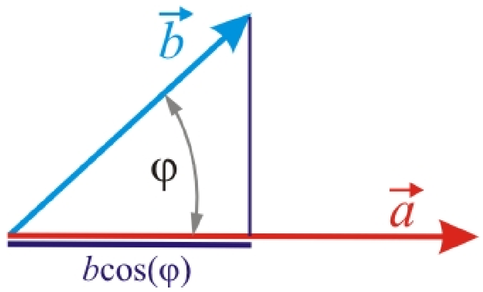
pri čemer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

V koordinatnem zapisu zapišemo skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ in $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ kot:

$$\boxed{c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}.$$

V kolikor pomnožimo vektor $\vec{a}$ skalarno z vektorjem $\vec{a}$, je velikost skalarja enaka kvadratu njegove dolžine $|\vec{a}|$:

$$\boxed{a = |\vec{a}| = \vec{a} \cdot \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$



4. Vektorski produkt dveh vektorjev

Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ priredi vektorjema tretji vektor:

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}},$$

ki je pravokoten na ravnino, določeno z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ oblikujejo v tem vrstnem redu pozitivni trirob, po pravilu desnega vijaka (glej sliko).

Dolžina vektorja $c = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ je številsko enaka ploščini paralelograma, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Torej lahko velikost skalarnega produkta zapišemo kot:

$$\boxed{c = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin(\varphi)},$$

pri čemer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

V komponentah lahko vektorski produkt vektorjev
$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ in $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ zapišemo kot:

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}}.$$