MATRIKE

1. Podani sta matriki $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ in $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Izračunaj $A+B$, $B+A$, $A+I$, $A-B$, $B-A$, $5A$, $2A+3B$, AI, AB in BA.

2. Dani sta matriki $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ in $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$. Izračunaj $AB-BA$. $R: 0$ (3×3 matrika samih ničel).

3. Izračunaj produkta AB in BA, če je $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ in $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
$R: AB=\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

4. Dokaži, da velja formula $M(a)\,M(b)=M(a+b)$, če je $M(a)=\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$.
Nasvet: adicijski izreki.

5. Naj bo A vrstični vektor in B stolpični vektor: $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Izračunaj AB in BA. $R: AB=[19]$, $BA=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \\ 12 & 24 & 4 \end{bmatrix}$.

6. Izračunaj:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. $R: \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. $R: \begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. $R: [11]$

7. Izračunaj $f(A)$, če je $f(x)=x^2-x-1$ in $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. $R:$ $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

8. Izračunaj $f(A)$, če je $f(x) = -2 - 5x + 3x^2$ in $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. R : $\begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$

9. Zapiši manjkajoče elemente matrike A tako, da bo le-ta simetrična: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 & 7 \\ & 1 & & \\ & 3 & 0 & \\ & 1 & & 3 \end{bmatrix}$.

10. Pokaži, da je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ idempotentna.

11. Pokaži, da za matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ velja $(BA)^T = A^T B^T$.

12. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ in $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$. Določi realno število y tako, da bo matrika $D = Q^T AQ$ diagonalna.

13. Naj bosta $A = \begin{bmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 0 & -1 & x & y \\ -1 & x & y & z \end{bmatrix}$. Pokaži, da je BA simetrična matrika.

14. Pokaži, da je matrika $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ortogonalna.

15. Matriko $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ zapiši kot vsoto matrik, od katerih je ena simetrična in druga antisimetrična. $R : A = S + P$, $S = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Nasvet: $S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$, $P = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$.

16. $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.
Izračunaj J^2, J^3, J^4, ..., JA, BJ, AB in BA.

17. * $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{13} =?$. $R: \begin{bmatrix} 1 & 13 & 78 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Namig: matriko A najprej zapiši kot vsoto identične in nilpotentne matrike.

18. Naj bosta A in B taki matriki razsežnosti 2×2, da sta obe komutativni za množenje z matriko $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pokaži, da je tedaj $AB = BA$.

19. Dokaži: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Namig: matematična indukcija.

20. Izračuna A^n za vsako naravno število n, če je x realno število in $A = \begin{bmatrix} 0 & \cos x & 0 \\ \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & \sin x & 0 \end{bmatrix}$. $R: A^n = \begin{cases} A, & n \text{ lih} \\ A^2, & n \text{ sod} \end{cases}$