Elektrodinamika-II

Prof.dr. Bojan Grčar
Doc.dr. Jože Ritonja

Učni cilj: spoznati osnovne koncepte v modeliranju in analizi časovno zveznih dinamičnih sistemov na področju elementarnih elementov, električnih vezij, elektromagnetnih in elektromehanskih naprav.

Področje in cilj:

Elektromagnetne in elektromehanske naprave (transformatorji, motorji, generatorji, pogone,...) in sisteme (elektroenergetski sistemi) lahko obravnavamo v ustaljenih ali prehodnih stanjih. Ustaljena stanja karakterizira ravnotežje dovedene in porabljene moći, prehodna stanja pa nastopijo pri spremembah ravnotežnih stanj zaradi:

- spremembe obremenitve,
- spreminjanja krmilnih (vhodnih, vzbijalnih) količin,
- vpliva okolice (motnje),
- spremenjene strukture in parametrov,
- pri vklopih, izklopih in kratkih stikih,
- pri nastanku nesimetrije v trifaznih sistemih,
- ...

Obravnava prehodnih stanj zahteva poznavanje fizikalnega dogajanja in matematičnih postopkov za analizo. Drugi del predmeta je zato namenjen splošnim matematičnim postopkom in metodam, ki jih potrebujemo v analizi prehodnih stanj elektromagnetnih in elektromehanskih naprav in sistemov. V obravnavi se bomo omejili na kavzalne, časovno zvezne sisteme pri katerih je izhod:

- odvisen le od trenutnih in predhodnih vzbujanj,
- in notranja stanja so zvezne funkcije časa.

Vsebina, obveznosti in preverjanje:

Predavanja:

- Uvod
- T.1. Energija, energijski akumulatorji, spremenljivke stanja, modeli elementarnih elementov in vezij. Lagrangeova funkcija, Euler-lagrangeova metoda
- T.2. Lineaenost, linearizacija,
- T.3. Oblike modelov, pretvorbe
- T.3. Stabilnost,
- T.4. Analitična rešitev, homogena in partikularna rešitev, standardni vzbujalni signali
- T.5. Obravnava primerov iz področja elektromehanskih sistemov.
- <u>Pričakovano predznanje:</u> osnove matrične algebre, diferencialne enačbe, Laplace-ova transformacija

Obveznosti:

- sodelovanje na predavanjih,
- opravljene domače naloge,
- prisotnost na vajah,
- poročilo o vajah.

Vaje:

- Uporaba programskega orodja MATLAB/SIMULINK v analizi dinamičnih sistemov
- ......

Preverjanje znanja:

a.)

- Zagovor vaj
- Kolokvij (>40%)
- Domače naloge (20 %)
- Ustni zagovor

b.)

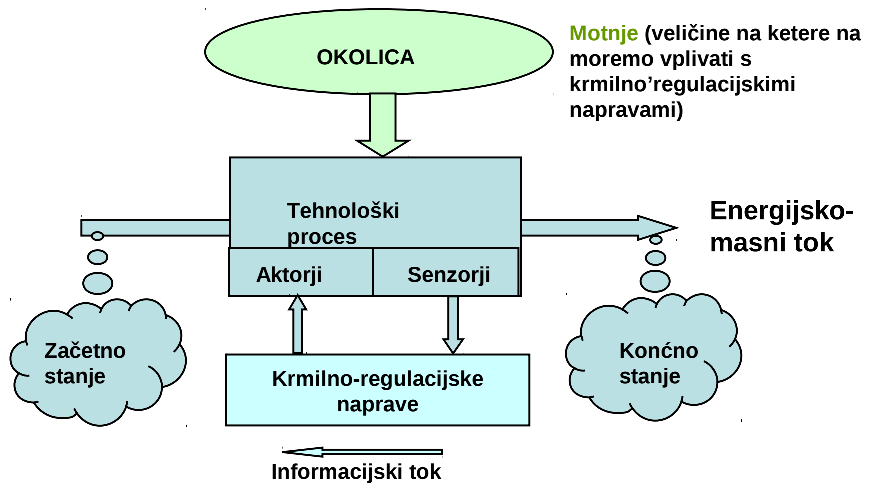
- Zagovor vaj, pisni izpit ((>50%), ustni izpit

Dinamični sistemi:

Tehnološki proces je zbirka elementov in notranjih povezav, ki omogočajo energijsko-masne pretvorbe. Tehnološke procese opisujemo s fizikalnimi količinami. Tehnološki procesi so praviloma v interakciji s svojo okolico.

Na energijsko-masne pretvorbe v obravnavanem sistemu lahko vplivamo preko aktorjev in krmilnih vhodov, stanja sistema opazujemo preko senzorjev, okolica pa na sistem vpliva preko motenj.

Poleg tehnoloških velja omeniti še npr. biološke, kemijske, in nematerialne sisteme kot npr. sociološke, ekonomske, informacijske, ...



Dinamika sistemov- znastvena disciplina, ki opisuje obnašanje sistema ob prehajanju iz ravnotežnih stanj pod vplivom sprememb (krmilnih) vhodov, motenj, parametrov ali notranje strukture. Proučevanje dinamike sistemov zahteva:

- definiranje sistema, njegovih vhodov, izhodov in interakcij z okolico,
- postavitev matematičnega modela, ki ga izpelejemo na osnovi fizikalnih zakonitosti,
- analizo dinamičnega obnašanja, vplivnih veličin, strukturnih lastnosti,
- na snovi spoznanj iz analize morebitne spremebe konstrukcije, strukture ali parametrov sistema.

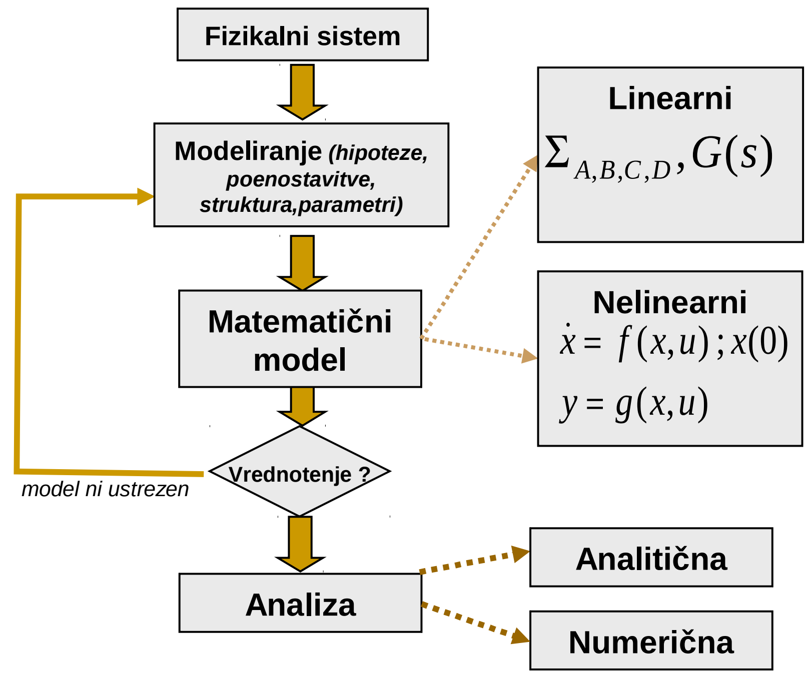
Sistemi pri katerih so izhodi in notranja stanja vsak trenutek odvisni le od trenutnih vhodov (vzbujanj) so **statični** sistemi.

Sistemi pri katerih so izhodi in notranja stanja vsak trenutek odvisni od trenutnih in vseh predhodnih vhodov (vzbujanj) so **dinamični** sistemi.

Dinamični sistemi vsebujejo **energijske akumulatorje** oziroma elemente, ko omogočajo hranjenje različnih vrst energije.

Spremenljivke, ki opisujejo stanja neodvisnih energijskih akumulatorjev imenujemo **spremenljivke stanja** sistema.

Dinamični sistemi:



Klasifikacija dinamičnih sistemov:

- eno- ali večvhodni,
- linearni ali nelinearni,
- s koncentriranimi ali porazdeljenimi parametri,
- časovno zvezni ali časovno diskretni in
- s konstantnimi ali spremenljivimi parametri.

Dinamične sisteme pa lahko razdelimo tudi glede na fizikalno naravo spremenljivk in parametrov s katerimi je sistem opisan, npr. električni, mehanski, termični, hidravlični, elektromehanski, ...

Matematična obravnava dinamičnih sistemov:

- sisteme s koncentriranimi parametri opišemo z linearnimi ali nelinearnimi diferencialnimi enačbami.
- sisteme s porazdeljenimi parametri opišemo s parcaialnimi diferncialnimi enačbami.
- če se omejimo na analizo ravnotežnih stanj opišemo takšne sisteme z linearnimi ali nelinearnimi algebrajskimi enačbami.

Izhodiščna faza pri obravnavi dinamičnih sistemov je (fizikalno) modeliranje, ki povzema "bistvene" lastnosti sistema in vodi na določeno obliko **matematičnega modela**.

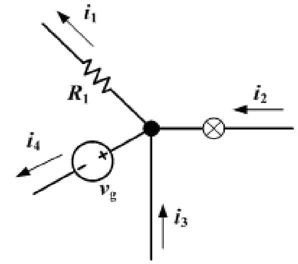
Matematični modeli so lahko parametrični (parametri sistema nastopajo v eksplicitni obliki) ali neparametrični (utežna funkcija, impulzni odziv), kjer se vpliv parametrov obravnavanega sistema kaže v implicitni obliki.

*Modeliranje je pogosto iterativni proces v katerem matematični model postopno dopolnjujemo, da dovolj natančno opišemo lastnosti sistema, ki jih želimo analizirati. Matematični modeli,ki temeljijo na vpeljanih abstrakcijah in poenostavitvah vedno predstavljajo le **približek** realnih fizikalnih sistemov.*

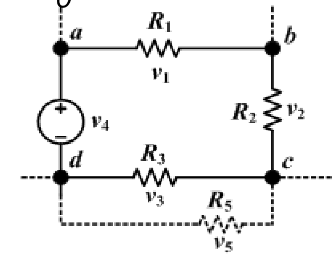
***Sistemska teorija** nam omogoča, da za sisteme z različno fizikalno naravo izpeljemo enakovredne oblike matematičnih modelov, ki jih lahko formalno analiziramo na poenoten način, tako v smislu dinamičnega obnašanja kot tudi z vidika njihovih strukturnih lastnosti.*

Dinamični sistemi:

$i_1 + i_4 = i_2 + i_3$



$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$



a.) Postavitev matematičnega modela -klasični pristop:

- ravnotežne enačbe (Kirchoff , Newton,), ohranitveni zakoni (mase, energije)
- konstitutivne enačbe (podajajo zveze med količinami)
- v primeru sestavljenih (kompleksnih) sistemov strukturiramo celoto v več smiselnih podsitemov in določimo njihove medsebojne povezave
- izpeljan matematični model zapišemo v obliki, ki je najbolj primerna za nadaljno analizo

$$\underbrace{P_d}_{\text{dovedena moč}} - \underbrace{P_p}_{\text{porabljena moč}} = \underbrace{\frac{d}{dt}E}_{\text{sprememba notranje energije}}$$

$$\underbrace{q_{in}}_{\text{vzstopni pretok}} - \underbrace{q_{out}}_{\text{izstopni pretok}} = \underbrace{\frac{d}{dt}V}_{\text{sprememba volumna}}$$

$$\underbrace{\sum_i F_i}_{\text{vsota sil}} - \underbrace{m\,a}_{\text{posp.sila}} = 0$$

$$\underbrace{\sum_i T_i}_{\text{vsota navorov}} - \underbrace{J\,\alpha}_{\text{posp. navor}} = 0$$

b.) Postavitev matematičnega modela -energijski pristop; izhaja iz temeljnega zakona o ohranitvi energije

energijska funkcija

kinetična

$$L = T - V = \text{konst.!} \quad \rightarrow$$

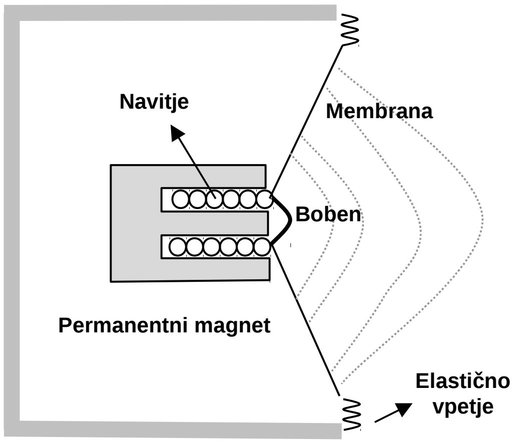
potencialna

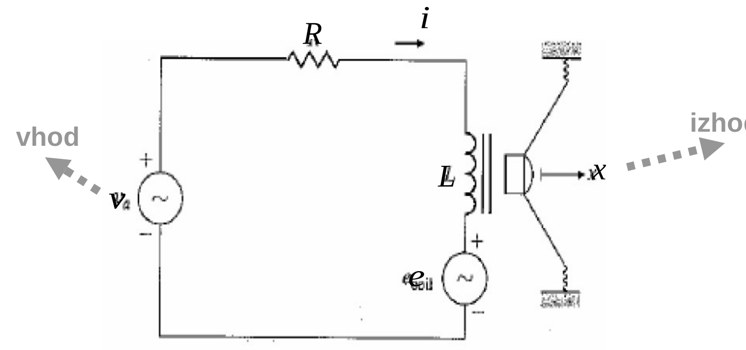
..... $$\frac{dL}{dt} = 0$$

Sistem s konstantno notranjo energijo

Konzervativni sistem= brez izgub in aktivnih izvorov

Model elektromehanskega sistema (EMS):





-mehanski podsistem:

•Gibanje membrane duši zrak; d-koeficient dušenja, M masa gibljivih delov (boben in navitje), k-koeficient elestičnosti membrane;

•Vzbujalna sila je proporcionalna toku skozi navitje

•Mehanska ravnotežna enačba:

$$\underbrace{M\ddot{x}}_{\text{masa}\times\text{pospešek}} = \underbrace{\underbrace{c\,i}_{\text{vzbujalna sila}} - \underbrace{b\dot{x}}_{\text{dušenje}} - \underbrace{(1/k)\,x}_{\text{elast. vpetja}}}_{\sum_i F_i}$$

-električni podsistem:

• napetost izvora je proporcionlna zvočnemu signalu iz ojačevalnika

• inducirana protinapetost e je proporcionalna hitrosti gibanja, posledica gibaja membrane v polju permenentnega magneta

➔ napetostna ravnotežna enačba

$$L\dot{i} + Ri = \underbrace{v}_{\text{vzbujalna napetost}} - \underbrace{c\dot{x}}_{\text{inducirana napetost - e}}$$

EMS-nadaljevanje:

$$\frac{d}{dt} := D, \quad \frac{d^2}{dt^2} := D^2, \ldots \rightarrow$$

Operatorski polinom !

$$(MD^2 + bD + (1/k))\,x = c\,i$$

$$(LD + R)\,i = v - cDx$$

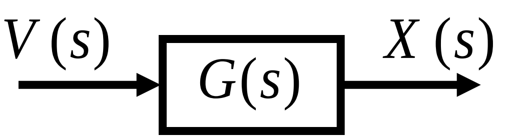
$$((LD + R)(MD^2 + (b + c^2)D + (1/k)))x = cv$$

$$x = \frac{c}{((LD + R)(MD^2 + (b + c^2)D + (1/k))} v$$

Vhodno-izhodni opis sistema podaja zvezo med vzbujalno napetostjo in pomikom membrane. Omogoča nam, da z izbiro parametrov oblikujemo ustrezno frekvenčno karakteristiko.

$$D \xrightarrow{\mathcal{L}} s$$

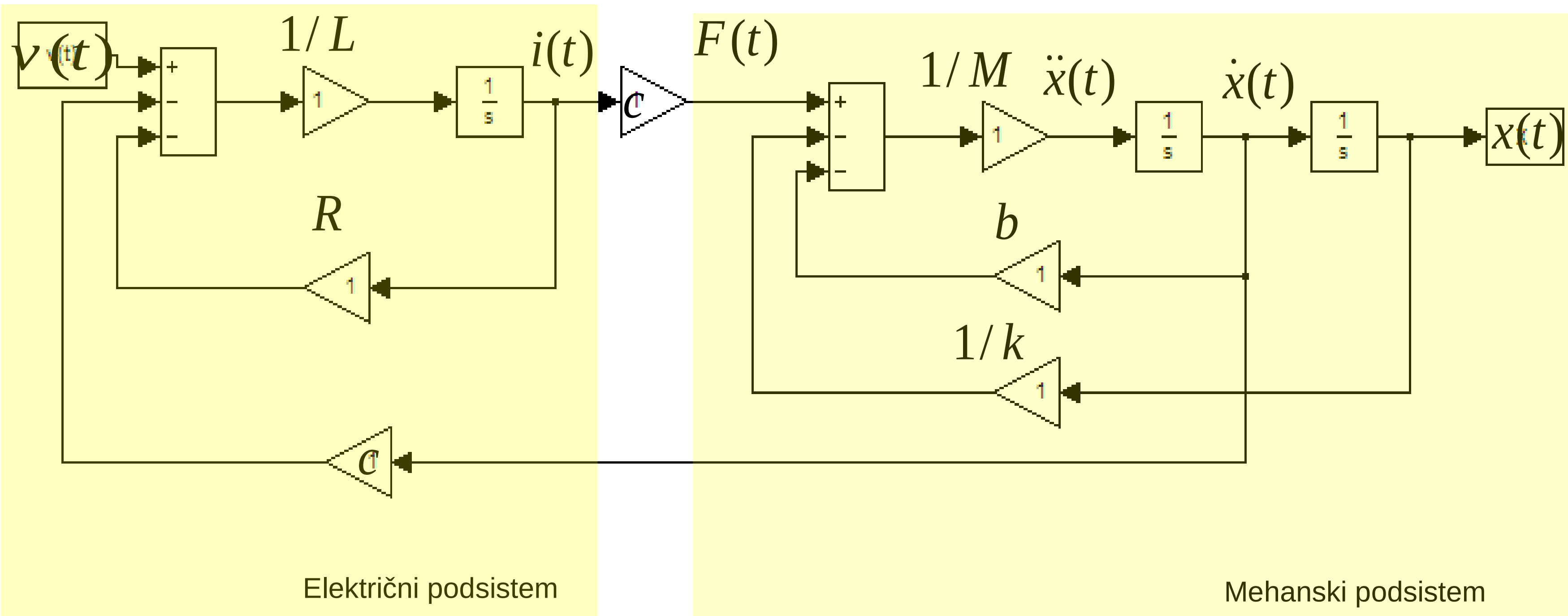
$$X(s) = \underbrace{\frac{c}{((Ls + R)(Ms^2 + (b + c^2)s + (1/k))}}_{G(s)} V(s)$$



EMS-simulacijski diagram:

$$\left.\begin{array}{ll} (MD^2 + bD + (1/k))\,x = c\,i & \rightarrow D^2 x = 1/M\,(-bDx - (1/k)x + ci) \\ (LD+R)\,i = v - cDx & \rightarrow Di = 1/L(-Ri - cDx + v) \end{array}\right\} \rightarrow$$

Stanja sistema !



EMS-nadaljevanje:

Obravnavan model je torej definiran z:

- vhodom $v(t)$ in izhodom $x(t)$
- s stanji sistema $\left[x(t) \quad \dot{x}(t) \quad i(t)\right]^{\mathrm{T}}$
- in vektorjem parametrov

$$\left[L\ R\ M\ b\ c\ 1/k\right]^{\mathrm{T}}$$

- *Model je tretjega reda zaradi treh neodvisnih energijskih akumulatorjev (integratorjev), ki jih opisjejo spremenljivke stanja sistema. Model izražen s stanji sistema v matrični obliki je torej:*

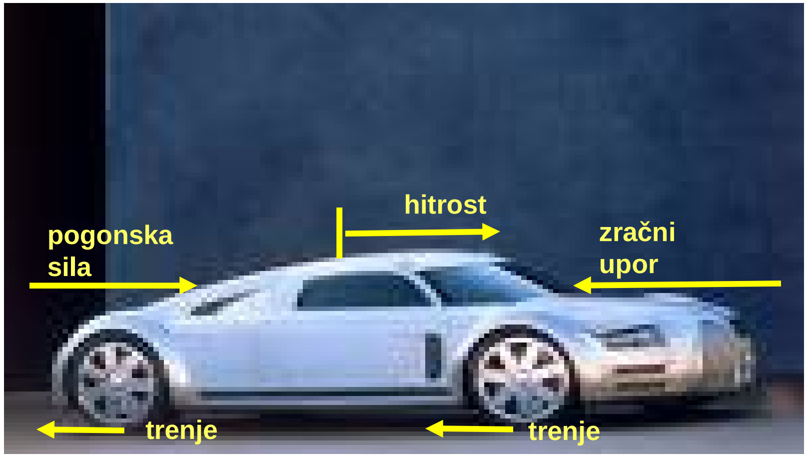
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{kM} & -\frac{b}{M} & \frac{c}{M} \\ 0 & -\frac{c}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v \rightarrow$$

$$\underline{\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + bu}$$

Podatki za simulacijo:

Induktivnost tuljave (L)	0,2 mH
Upornost tuljave (R)	4,5 Ω
Masa gbljivih delov (M)	11 g
Dušenje (b)	1,3 kg/s
Koeficient elestičnosti (1/k)	$1{,}2 \bullet 10^3$ N/m
Magnetna konstanta (c)	4,5 N/A

Model mehanskega sistema:



-kinetična energija v trenutku t_0

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Ker je energija vsak trenutek odvisna od hitrosti vozila, jo izberemo kot spremenljivko stanja.

$$\frac{dE_0}{dt} = P_0 = F v_0 = m v_0 \frac{dv_0}{dt}$$

-če zanemarimo zračni upor in kotalno trenje dobimo z odvajanjem nergije po času:

$$m\frac{d}{dt}v = \underbrace{F_p(t)}_{\text{pogonska sila}} \xrightarrow{\int} v(t) = \frac{1}{m}\int_0^t F_p(\tau)\,d\tau + v_0$$

-če je: $F_p(t) = \text{konst.} \rightarrow v(t) = ?$

- kakšna bo hitrost : $t \rightarrow \infty \rightarrow v(t) = ?$

-če upoštevamo zračni upor in kotalno trenje velja:

$$m\frac{d}{dt}v = \underbrace{F_p(t)}_{\text{pogonska sila}} - \underbrace{F_{kt}(t)}_{\text{kotalno trenje}} - \underbrace{F_{zu}(t)}_{\text{zracni upor}} =$$

$$= F_p(t) - k_t(t)\,v(t) - k_{zu} v^2(t) \rightarrow$$

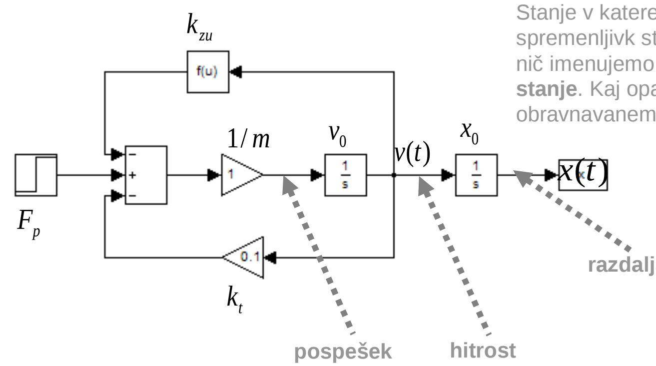
$$v = \frac{1}{m}\int_0^t F_p(\tau)\,d\tau - \frac{k_t}{m}\int_0^t v(\tau)\,d\tau - \frac{k_{zu}}{m}\int_0^t v^2(\tau)\,d\tau + v_0$$

- prevožena razdalja: $x(t) = \int_0^{t_1} v(\tau)\,d\tau$

- pri konstantni pogonski sili bo vozilo doseglo končno (konstantno) hitrost:

$$v_k = \frac{-k_t + \sqrt{k_t^2 + 4k_{zu}F_p}}{2k_{zu}} = konst. \quad ; \frac{dv}{dt} = 0$$

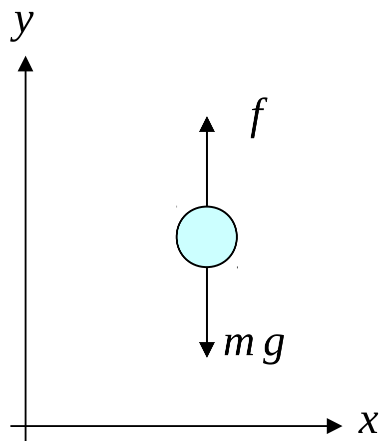
Stanje v katerem so odvodi spremenljivk stanja enaki nič imenujemo **ravnotežno stanje**. Kaj opazimo v obravnavanem primeru ?



Euler-Lagrangeova metoda:

Ravnotežna enačba: $$m\ddot{y} = \sum_i f_i$$

$$m\ddot{y} = f - mg$$



Leonhard Euler, švicarski matematik, fizik in astronom,, 1707-, 1783,algebra,diferencialni račun, izrek o ohranitvi kinetične in potencialne energije

Joseph-Louis de Lagrange1 736 – 1813 diferencialne enačbe, variacijski račun,...

Kinetična (T) in potencialna energija (V):

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \qquad V = m g y$$

položaj in hitrost➔ energ.stanje➔ s premenljivki stanja

Lagraneova funkcija : $$L := T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - m g y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2\right) = m\dot{y}$$

gibalna količina

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(mgy) = -mg$$

sila teže

Euler-Lagraneova enačba: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = f$$

$$\frac{d}{dt} m\dot{y} + mg = f \rightarrow$$

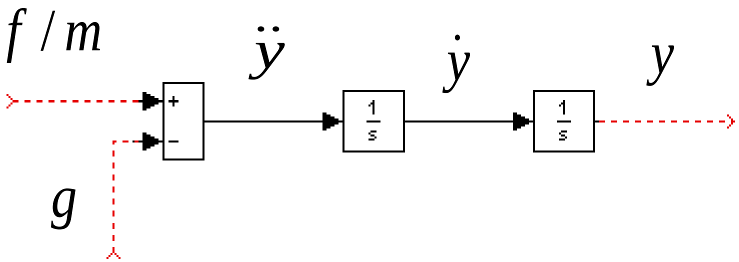
sprememba gibalne količine po času=sila

$$m\ddot{y} = f - mg$$

Euler-Lagrangeova metoda:

NDE: $$m\ddot{y} = f - mg$$

$$\ddot{y} = f/m - g$$



Izraženo s stanji sistema:

$$x_1 = y \quad ; x_2 = \dot{y} \rightarrow$$

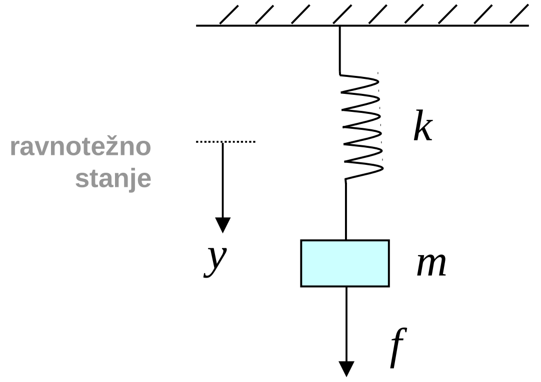
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} g$$

Ravnotežje: $$\ddot{y} = 0 \longrightarrow f = mg$$

$$\dot{y} = 0$$

$$y = y_r$$

Euler-Lagrangeova metoda:



Izhajamo iz ravnotežnega stanja, tako da velja

$$y = 0 \rightarrow f = 0$$

Vpliv težnosti lahko tako zanemarimo, f predstavlja vzbujalno silo.

Kinetična (T) in potencialna energija (V):

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \qquad V = \int_0^y F\, dy' = \int_0^y k\, y'\, dy' = \frac{1}{2} k\, y^2$$

Lagraneova funkcija L :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k\, y^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2\right) = m\dot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} k y^2\right) = -ky$$

Euler-Lagraneova enačba:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = f$$

$$\frac{d}{dt} m\, \dot{y} + ky = f \rightarrow$$

NDE 2 stopnje (2 energ. akumolatorja):

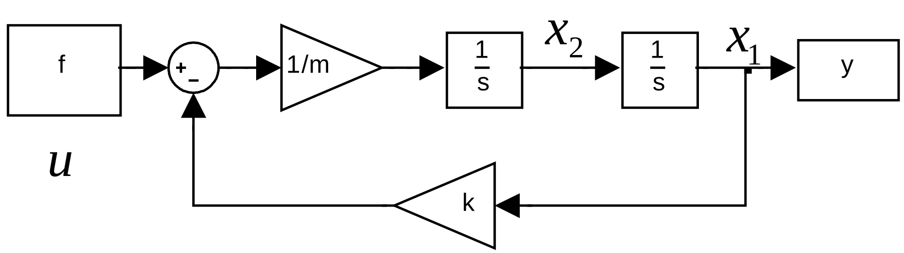
$$m\, \ddot{y} + k\, y = f$$

Euler-Lagrangeova metoda:

$$m\ddot{y} + k\,y = f$$

$$\ddot{y} + (k/m)\,y = f/m$$

$$\ddot{y} = 1/m(-k\,y + f)$$

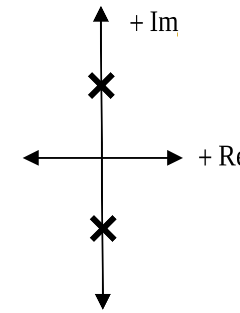


$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f = \underline{Ax + bu} \quad ; x_0$$

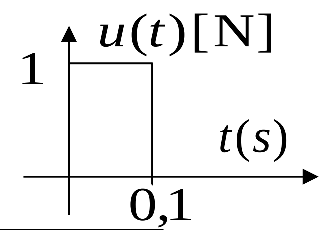
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x = c^T x$$

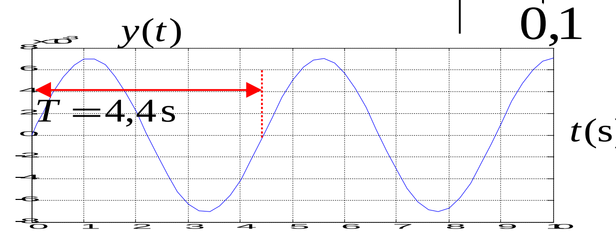
Lastne vrednosti sistemske matrike A :

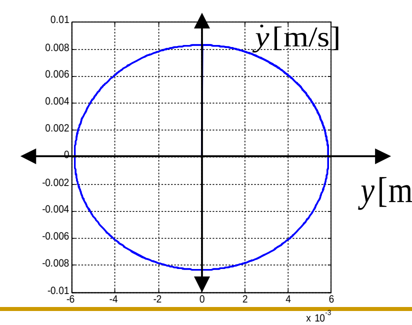
$$\lambda_{1,2} = \pm j\frac{\sqrt{mk}}{m} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$$



Za primer : $m = 1[\mathrm{Kg}], k = 2[\mathrm{N/m}], x_0 = 0$







Matematična oblika modelov:

Rezultat fizikalnega modeliranja je matematični model, ki ga dobimo v obliki linearne ali nelinearne diferencialne anačbe (ali sistema takšni enačb). Z vpeljavo koncepta spremenljivk stanj, ki se navezujejo na energijske akumulatorje sitema, lahko tovrstne ančbe pretvorimo v sistem linearnih ali nelinearnih enačb prvega reda. Večina realnih fizikalnih sistemov je v osnovi nelinearna, linearni modeli predstavljajo praviloma le aproksimacijo realnih sistemov v izbranem in omejenem področju obratovanja.

Nelinearni sistemi

$$\dot{x} = f(x,u) \quad ; x_0$$

$$y = g(x,u)$$

stopnja=n

Linearna aproksimacija

Linearni sistemi

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; x_0$$

$$y = Cx + Du$$

stopnja=n

Pretvorba (?!)

I/O opis

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

stopnja= $m \leq n$

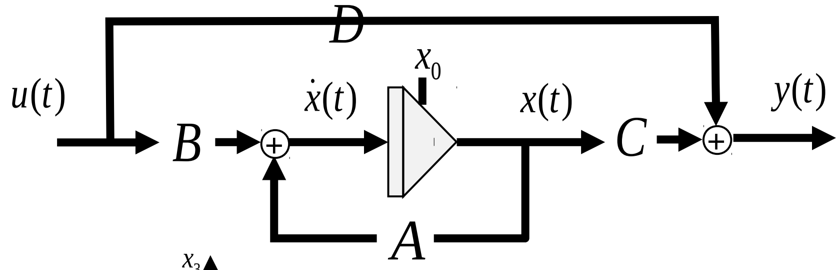
Izpejane modele potrebujemo za:

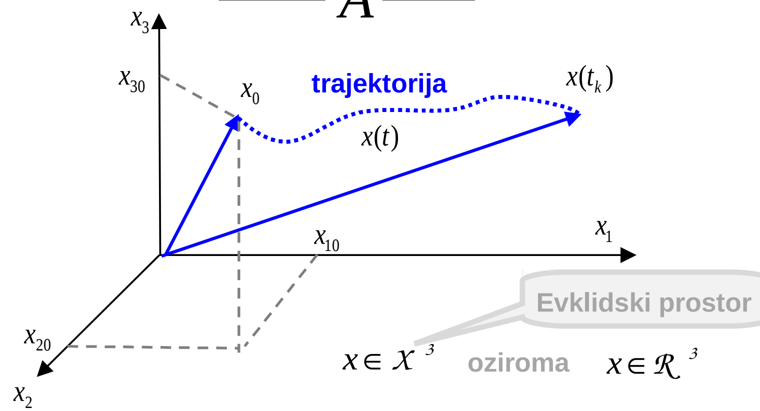
- določitev ravnotežnih stanj
- analizo strukturnih lastnosti
- analizo dinamičnega obnašanja
- analizo stabilnosti
- analizo vpliva začetnih pogojev
- vpliv parametrov
- načrtovanje vodenja

$$G(s) \supset \sum{}_{A,B,C,D} \supset f(.)\,,g(.)$$

Matematična oblika modelov:

Linearne sisteme v "prostoru stanj" rešujemo bodisi analitično ali numerično. Dobljena rešitev podaja "gibanje" sistema, ki je rezultat začetnih pogojev *x(0)* in zunanjega vzbujanja *u(t)*. Za časovno invariantne linerne sisteme so *A*, *B*, *C* in *D* konstantne matrike, ke se nanašajo na strukturo in parametre obravnavanega sistema. Do dimenzije n=3 lahko gibanje, ki ga opisuje vektor stanja *x*(t) tudi grafično prikažemo :





Običano bomo predpostavili:
p-štev. vhodov, *q*-štev. izhodov, z *n* pa bomo označevali stopnjo sistema oziroma dimenzijo vektorja spremenljivk stanja. Sledi, da so dimenzije sistemske -*A*, vhodne-*B* , izhodene –*C* in prehodene -*D* matrike za multivariabilne sisteme (MIMO):

$$\dim A = n \times n$$
$$\dim B = n \times p$$
$$\dim C = q \times n$$
$$\dim D = q \times p$$

Evklidski prostor je realni topološki vektorski prostor v katerem je definirana metrika na osnovi skalarnega produkta: norma (dolžina), kot med dvema vektorjema in razdalja. Dimenzija prostora je definirana s številonm baznih vektorjev oziroma s številom komponent vektorja stanja *x.* Lastnosti vektorjev in njihove medsebojne zveze so neodvisne (invariantne) glede na vse nesingularne linearne transformacije tipa $x' = T\,x\,;\det T \neq 0$

$$<x.y>= \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots x_n\, y_n$$ **skalarni produkt**

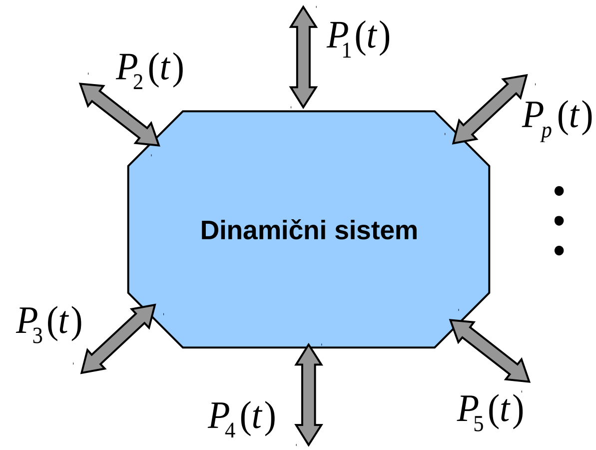
$$\|x\| = \sqrt{<x.x>} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$ **norma (dolžina)**

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{<x.y>}{\|x\|\|y\|}\right)$$ **kot med x in y**

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$ **razdalja med x in z**

Za univariabilne sisteme se modeli seveda poenostavijo, saj velja da je p=q=1

Energija, moč, stanja:



Opis dinamičnih sistemov temelji na **osnovnih (elementarnih) elementih**, ki definirajo energijsko stanje sistema, pretoke energije znotraj sistema in energijsko bilanco med sistemom in okolico. Zakon o ohranitvi energije predstavlja temelj pri definiranju osnovnih elementov. Naj velja, da si sistem lahko izmenjuje energijo z okolico preko končnega števila sponk (portov). Nadalje predpostavljamo, da sistem tvorijo samo osnovni (pasivni) elementi, torej je sistem brez notranjih energijskih izvorov. Potem velja za (notranjo) energijo sistema:

$$P(t) = \frac{d\,\mathrm{E}}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{E}(t) = \int_0^t P(\tau)\,d\tau + \mathrm{E}_0$$

kjer je P(t) trenutna moč izmenjav z okolico. Za p povezav sistema z okolico velja bilanca moči:

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) + \ldots + P_p(t) = \sum_{i=1}^{p} P_i(t)$$

Pozitivni predznak moči pomeni povečevanje notranje energije sistema, negativni predznak pa njeno zmanjševanje.

Če ima sistem n enargijskih akumulatorjev potem velja za (totalno) notranjo energijo:

$$\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}_1(t) + \mathrm{E}_2(t) + \ldots + E_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}_j(t)$$

in dalje:

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\,\mathrm{E}_j(t)}{dt}$$

Spremenljivke stanja (krajše: *stanja sistema* ali samo: *stanja*) definirajo energijsko stanje osnovnih elementov sistema. Ker se energijsko stanje elementov lahko spreminja le časovno zvezno, so tudi spremenljivke stanja časovno zvezne veličine.

http://teachers.stupidchicken.com/files/active/0/Work,%20Energy%20&%20Power.ppt

Električki sistemi:

V električkih sistemih definiramo dve vrsti energije:

- *magnetno*, ki je akumulirana v magnetnem polju tuljave
- *električno*, ki je akumulirana v električnem polju kondenzatorja

V primeru, da električki sistem tvorijo samo idealni elementi brez izgub lahko vloženo (akumulirano) magnetno ali električno energijo kadarkoli dobimo vrnjeno, oziroma jo sistemu v celoti zopet odvzamemo. Za električno moč velja:

$$P(t) = i(t)\ u(t) \qquad P - [\mathrm{W}], i - [\mathrm{A}], u - [\mathrm{V}]$$

Notranje energijo sistema izrazimo kot:

$$E = \int_0^t P(\tau)\, d\tau = \int_0^t i(\tau)\, u(\tau)\, d\tau + E_0$$

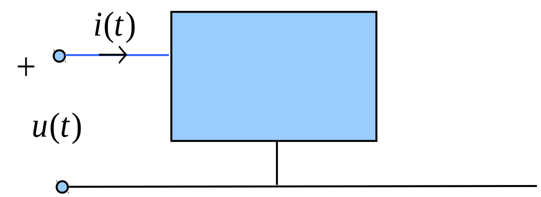
V električkih.sistemih vpeljemo še dve spremenljivki- električni naboj q [C] ali [As]:

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)\, d\tau + q(0) \rightarrow dq = i\, dt$$

in magnetni sklep ψ [Wb] oziroma [Vs]:

$$\psi(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau + \psi(0) \rightarrow d\psi = u\, dt$$

$$P(t) = i(t)\, u(t)$$



Spremembo notranje energije električkega sistema v času *dt* lahko izrazimo kot:

$$dE/dt = iu \quad \rightarrow d\mathrm{E}_{\mathrm{magnetna}} = i\,(u\, dt) = i\, d\psi$$

Sprememba energije kot posledica spremembe magnetnega sklepa .

$$dE/dt = iu \quad \rightarrow d\mathrm{E}_{\mathrm{električe}} = u\,(i\, dt) = u\, dq$$

Sprememba energije kot posledica spremembe naboja..

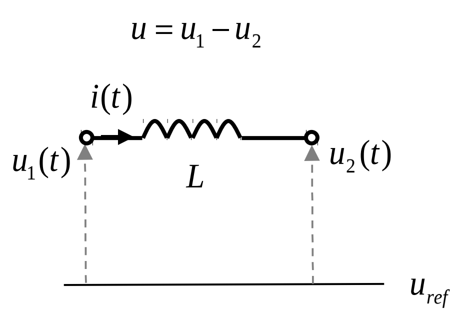
$$dE/dt = iu \quad \rightarrow d\mathrm{E}_{\mathrm{disipativna}} = (iu)\, dt$$

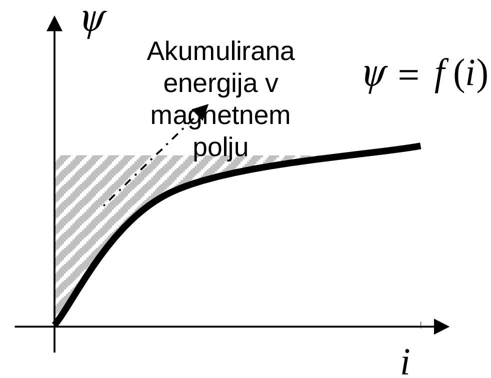
Sprememba energije kot posledica električmih izgub zaradi električne upornosti. Pri tem pride do pretvorbe električne energije v toplotno, ki prehaja v okolico. Spremeba je nepovratna (ireverzibilna), v toploto pretvorjene energije ni več mogoče vrniti električkemu sistemu ➔ električne izgube.

Elektriški sistemi-osnovni elementi: (

<u>Idealna tuljava;</u> osnovni element za katerega je podana enoumna zveza med magnetnim sklepom in tokom:

$$\psi = f(i)$$





Ob predpostavljeni linearni zvezi : $\psi = L\,i$

kjer je L proporcionalna konstanta (induktivnost) v [H] oziroma [Vs/A], velja za akumulirano magnetno energijo:

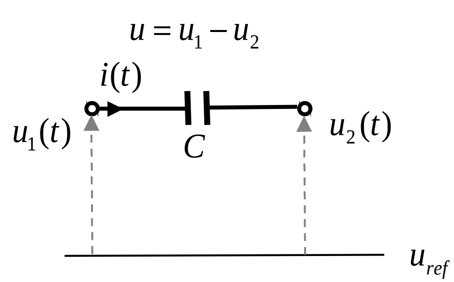
$$\mathrm{E} = \int_0^{\psi} i\,d\psi = \frac{1}{L}\int_0^{\psi} \psi\,d\psi = \frac{1}{2L}\psi^2 = \frac{1}{2}Li^2$$

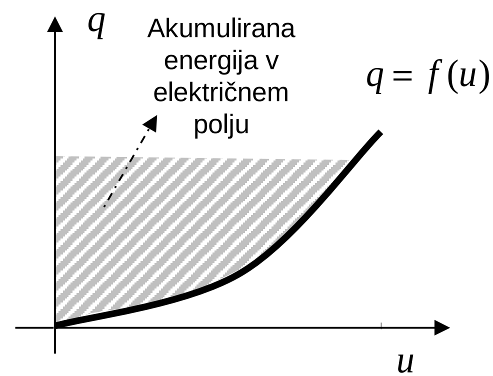
Za zvezo med napetostjo na tuljavi in tokom velja:

$$P = ui = \frac{d\,\mathrm{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = Li\frac{di}{dt} \,/ : i \rightarrow u = L\frac{di}{dt}$$

<u>Idealni kondenzator;</u> osnovni element za katerega je podana enoumna zveza med nabojem q in napetostjo u:

$$q = f(u)$$





Ob predpostavljeni linearni zvezi: $q = C\,u$

kjer je C proporcionalna konstanta (kapacitivnost) v [F] oziroma [C/V] velja za akumulirano električno energijo:

$$\mathrm{E} = \int_0^{q} u\,dq = \frac{1}{C}\int_0^{q} q\,dq = \frac{1}{2C}q^2 = \frac{1}{2}Cu^2$$

Za zvezo med tokom in napetosrjo na kondenzatorju velja: $P = ui = \frac{d\,\mathrm{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right) = Cu\frac{du}{dt} \,/ : u \rightarrow i = C\frac{du}{dt}$

Elektriški sistemi-osnovni elementi: (

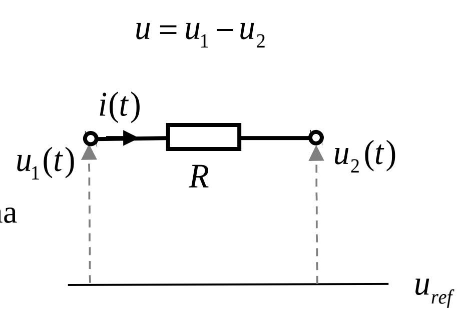
Idealni upor; osnovni element za katerega je podana enoumna zveza med tikom in napetostjo:

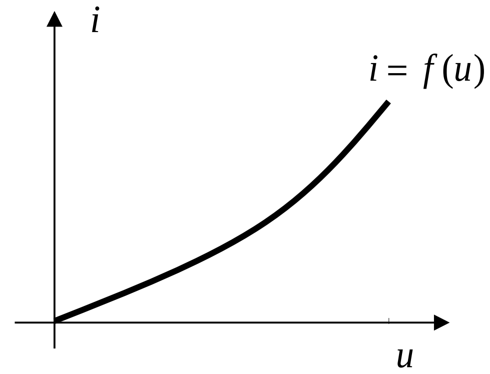
$$i = f(u)$$

Ob predpostavljeni linearni upornosti : $i = \frac{1}{R} u$

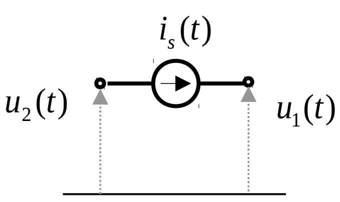
kjer je R proporcionalna konstanta (upornost) v [Ω] oziroma [V/A], velja za izgubno (disipativno) električno moč:

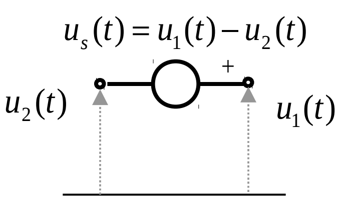
$$\mathrm{P} = u\, i = i^2 R = \frac{1}{R} u^2$$





Idealni izvori; v elektriških sistemih uporabljamo idealne napetostne in tokevne izvore, kjer sta vzbujalna napetost ali tok neodvisna od stanja v točki priključitve izvora. Idealni izvori lahko sprejemajo ali oddajajo neskončno električno moč. Realnejše razmere dobimo če na ustrezen način razširimo idealne izvore z notranjo upornostjo.





Mehanski sistemi-osnovni elementi:

(translatorni)

V mehanskih sistemih definiramo dve vrsti energije:

- *kinetično*, ki je posledica gibanja elementov s končno maso in
- *potencialno*, ki je posledica elestičnih deformacij elementov

V primeru, da mehanski sistem tvorijo samo mehanski elementi brez izgub lahko vloženo (akumulirano) kinetično ali potencialno energijo kadarkoli dobimo vrnjeno, oziroma jo sistemu v celoti zopet odvzamemo. Za mehansko moč velja:

$$P(t) = F(t)\,v(t) \qquad P - [\mathrm{W}], F - [N], v - [\mathrm{m/s}]$$

Notranje energijo sistema, ki jo izkoristimo za opravlajnje mehanskega dela izrazimo kot:

$$E = \int_0^t P(\tau)\,d\tau = \int_0^t F(\tau)\,v(\tau)\,d\tau$$

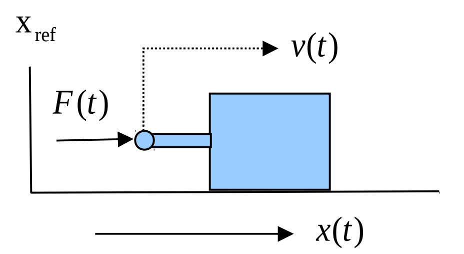
V translatornih mehanskih.sistemih vpeljemo še dve spremenljivki- (linearni) pomikx [m]:

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau + x(0) \rightarrow dx = v\,dt$$

in gibalno količino p [Ns]

$$p(t) = \int_0^t F(\tau)\,d\tau + p(0) \rightarrow dp = F\,dt$$

$$P(t) = F(t)\,v(t)$$



Spremembo notranje energije meganskega sistema v času *dt* lahko izrazimo kot:

$$dE/dt = Fv \quad \rightarrow d\mathrm{E}_{\mathrm{potencialna}} = F\,(v\,dt) = F\,dx$$

Sprememba energije kot posledica spremembe položaja zaradi elestične deformacije elementa.

$$dE/dt = Fv \quad \rightarrow d\mathrm{E}_{\mathrm{kinetičin}} = v\,(F\,dt) = v\,dp$$

Sprememba energije kot posledica spremembe gibalne količine, ki je povezan z gibanjem mase..

$$dE/dt = Fv \quad \rightarrow d\mathrm{E}_{\mathrm{disipativna}} = (F\,v)\,dt$$

Sprememba energije kot posledica mehanskih izgub zaradi trenja (dušenja). Pri tem pride do spremembe mehanske energije v toplotno, ki prehaja v okolico. Spremeba je nepovratna (ireverzibilna), v toploto pretvorjene energije ni več mogoče vrniti mehanskemu sistemu➔ mehanske izgube.

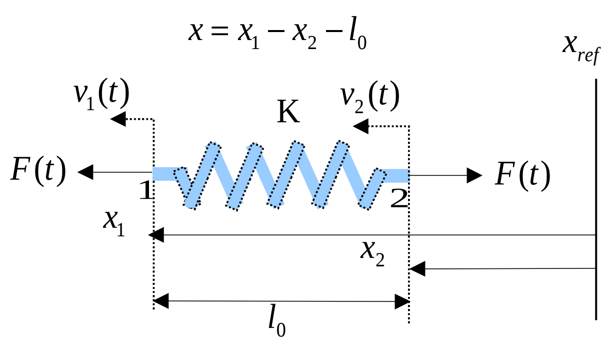
Lep pregled SI sistema merskih enot najdete na: http://physics.nist.gov/cuu/Units/

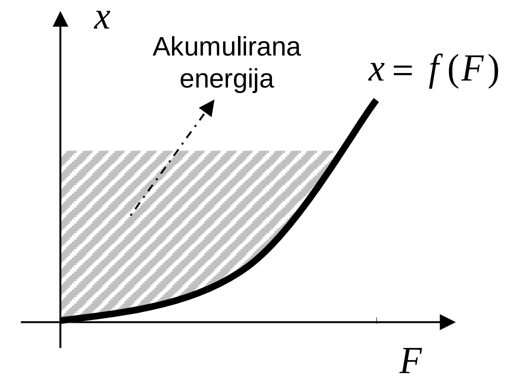
Mehanski sistemi-osnovni elementi:

(translatorni)

<u>Idealna vzmet</u>; osnovni element za katerega je podana enoumna zveza med silo in pomikom:

$$x = f(F)$$





Akumulirana energija: $\mathrm{E} = \int_0^x F\,dx$

Za linearno vzmet velja: $F = K\,x$

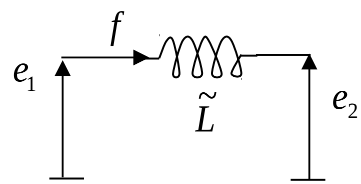
kjer je K konstanta vzmeti v [N/m]➔

$$\mathrm{E} = \int_0^x F\,dx = \int_0^x K\,x\,dx = \frac{1}{2}K\,x^2 = \frac{1}{2K}F^2$$

Za zvezo med silo in hitrostjo velja:

$$\frac{d}{dt}F = K\frac{d}{dt}x = K(v_1 - v_2)$$

Predstavitev s posplošenim vezjem (analogija)



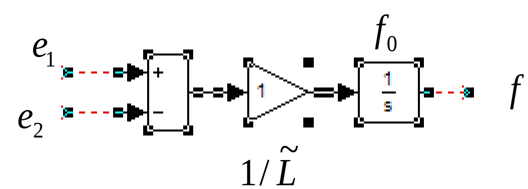
f –posplošena vzdolžna variabla

e –posplošena prečna variabla

$$\tilde{L}\frac{d}{dt}f = e_1 - e_2$$

$$\tilde{L} = 1/K$$

Predstavitev s simulacijskim diagramom:



Mehanski sistemi-osnovni elementi:

(translatorni)

<u>Masa:</u> osnovni element za katerega je podana enoumna zveza med gibalno količino p in hitrostjo v:

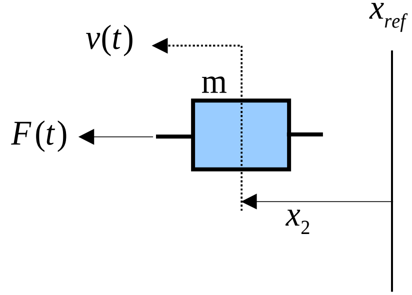
$$p = f(v)$$

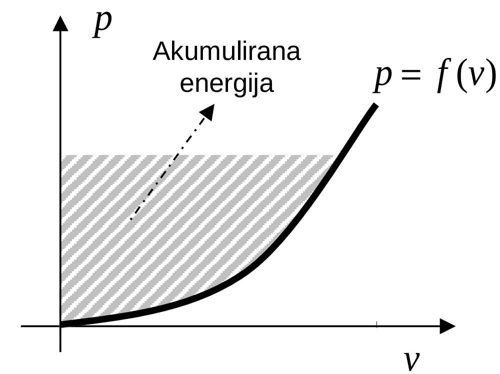
Predpostavimo, da je $v << c$, kjer je c hitrost svetlobe ➔

$$p = m v$$

Za akumulirano energijo mase m, ki se giblje s hitrostjo v velja:

$$E = \int_0^p v\, dp = \int_0^p \frac{p}{m} dp = \frac{1}{2m} p^2 = \frac{1}{2} m v^2$$





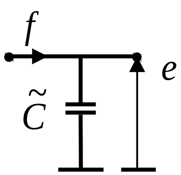
Za zvezo med silo in hitrostjo velja:

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

oziroma:

$$v = \frac{1}{m} \int_0^t F(\tau)\, d\tau + v_0$$

Predstavitev s posplošenim vezjem (analogija)



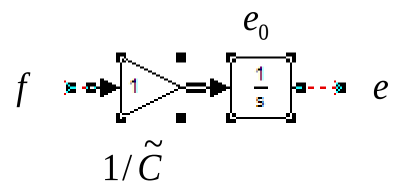
f –posplošena vzdolžna variabla

e –posplošena prečna variabla

$$f = \tilde{C} \frac{de}{dt}$$

$$e = \frac{1}{\tilde{C}} \int_0^t f(\tau)\, d\tau + e_0$$

Predstavitev s simulacijskim diagramom:



Pri velikih hitrostih velja za gibalno količino:

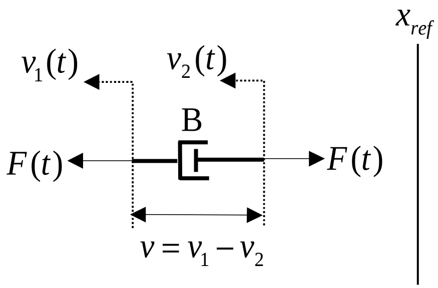
$$p = \frac{m v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

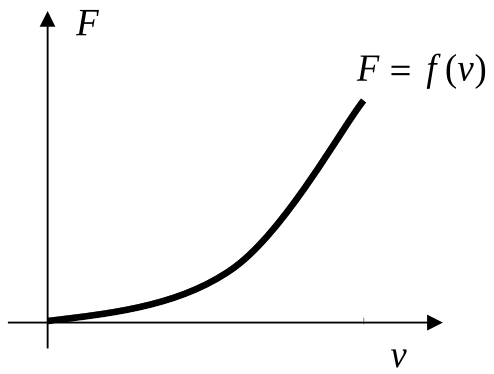
V izvajanju predpostavljamo, da je telo togo (se ne deformira pod vplivom zunanjih sil) in da je masa m kostantna.

Mehanski sistemi-osnovni elementi:
(translatorni)

Dušenje-trenje: osnovni element za katerega je podana enoumna zveza med silo trenja/dušenja in hitrostjo v:

$$F = f(v)$$





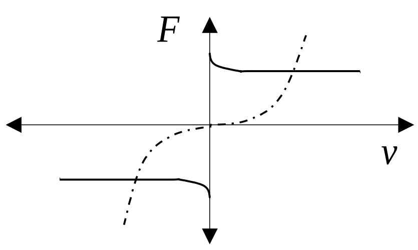
Če predpostavimo linearno zvezo med silo in hitrostjo (viskozno dušenje/trenje) potem velja:

$$F = Bv = B(v_1 - v_2)$$

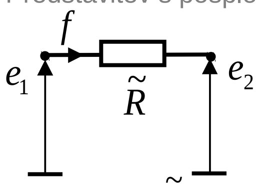
kjer je B koeficient dušenja v [Ns/m]. Moč, ki se nepovratno izgublja pri dušenju je:

$$\mathrm{P} = F\,v = B v^2 = \frac{1}{B} F^2$$

Idealni dušilni element je torej brez dinamike, saj ne akumulira mehanske energije. Zveza med hitrostjo in silo je podana s statično karakteristiko. Poleg linearnega (viskoznega) dušenja v mehanskih sistemih pogosto upoštevamo nelinearne karakteristike, ki opisujejo Culombovo trenje, hitrostno odvisno trenje, zračni upor,.....



Predstavitev s posplošenim vezjem (analogija)



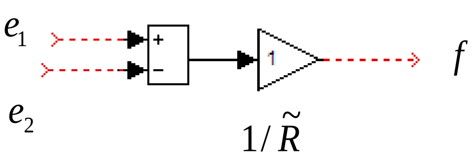
$$e_1 - e_2 = \tilde{R}\,f$$

$$\tilde{R} = 1/B$$

f –posplošena vzdolžna variabla

e –posplošena prečna variabla

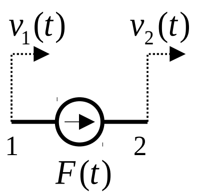
Predstavitev s simulacijskim diagramom:

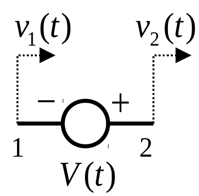


Mehanski sistemi:

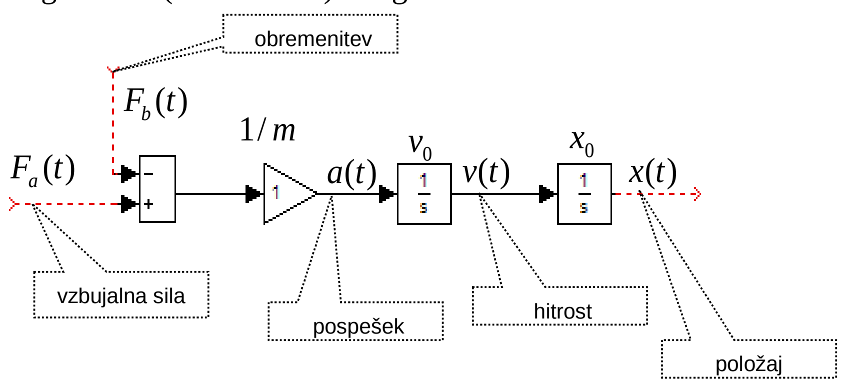
(translatorni)

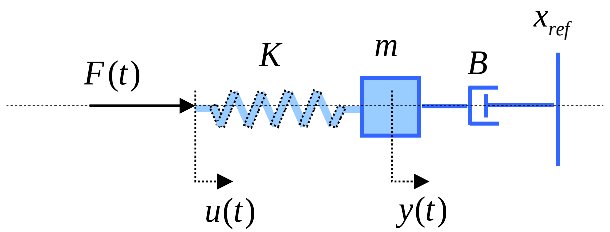
<u>Vzbujanje mehanskih sistemov;</u> kot vzbujalni veličini nastopajo v mehanskih sistemih sile in/ali hitrosti, ki jih generirajo idealni izvori. So neodvisni od stanja v točki kjer delujejo na sistem in lahko oddajajo ali sprejemajo neskončno moč. Realne izvore opišemo tako, da jim na ustrezen način dodamo dušilne elemente.





V translatornih mehanskih sistemih so položaj, hitrost, pospešek, vzbujalna sila in obremenitev vedno povezani v integratorski (kinematični) verigi.





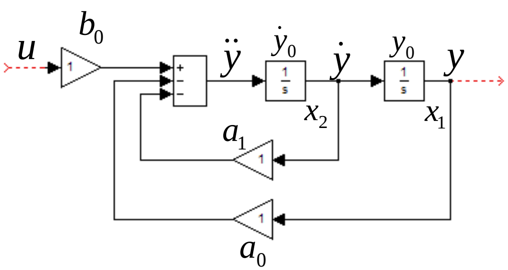
Sistem je enorazsežen (ena prostostna stopnja), zaradi dveh energijskih akumulatorjev pa drugega reda. Ravnotežna enačba:

$$\sum_i F_i = m\,a = m\,\dot{v} = m\,\ddot{y}$$

Za silo vzmeti in dušenje velja: $F_v = K\,(u-y)$

$$F_d = -B\,\dot{y}$$

$$\left.\begin{aligned} &m\,\ddot{y} + B\,\dot{y} + K\,y = K\,u \quad /:m \\ &\ddot{y} + a_1\,\dot{y} + a_0\,y = b_0\,u \quad ;a_1 = B/m,\ a_0 = b_0 = K/m \end{aligned}\right\}\text{NDE}$$



Spremenljivki stanja sta očitno položaj in hitrost oziroma izhoda iz obeh integratorjev➔

Mehanski sistemi:
(translatorni)

$$x_1 = y \quad , x_2 = \dot{y} \rightarrow$$
$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad , \dot{x}_2 = \ddot{y} \rightarrow$$

Zapišemo v matrični obliki:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u = Ax + bu$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = c^{\mathrm{T}} x$$

Z vpeljavo spremenljivk stanja smo NDE drugega reda pretvorili v sistem diferencialnih enačb prvega reda.. Tako zapisan sistem, ki ga podajajo sistemska matrika *A*, vhodna matrika (vektor) *b* in izhodna matrika (vektor) *c* bomo imenovali "**model v prostoru stanj-MPS**".

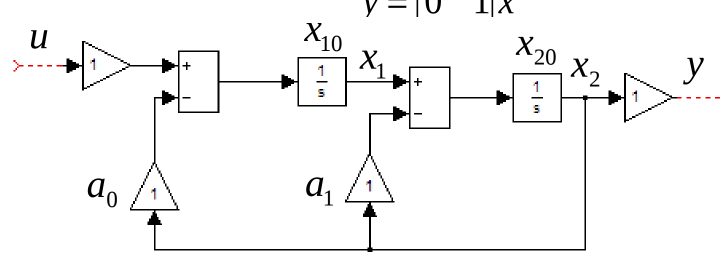
Ali je to edina možna oblika modela v prostoru stanj ?

Ne, MPS lahko zapišemo na mnogo načinov, le nekatere značilne (normalne) oblike pa uporabljamo v analizi in sintezi dinamičnih sistemov.

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u \rightarrow$$
$$0 = \underbrace{\underbrace{\underbrace{-a_0 y + b_0 u}_{=\dot{x}_1} - a_1 \dot{y}}_{=\ddot{x}_2} - \ddot{y}}_{=0}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_0 y + b_0 u \\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_1 - a_1 \dot{y} \xrightarrow{\int} \dot{x}_2 = x_1 - a_1 y \\ 0 &= \ddot{x}_2 - \ddot{y} \xrightarrow{\int\int} x_2 = y \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_0 x_2 + b_0 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_1 x_2 \end{aligned}\right\} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$



Mehanski sistemi:

(rotacijski

V rotacijskih mehanskih sistemih prav tako nastopata dve vrsti energije:

- *kinetična*, ki je posledica vrtenja elementov s končno maso okrog rotacijske osi in

- *potencialna*, ki je posledica torzijske elestičnosti

V primeru, da rotacijski mehanski sistem tvorijo samo mehanski elementi brez izgub lahko vloženo (akumulirano) kinetično ali potencialno energijo kadarkoli dobimo vrnjeno, oziroma jo sistemu v celoti zopet odvzamemo. Za mehansko moč velja:

$$P(t) = T(t)\,\Omega(t) \qquad P-[\mathrm{W}], T-[\mathrm{Nm}], \Omega-[\mathrm{rad/s}]$$

kjer je T mahanski navor in Ω kotna hitrost. Notranjo energijo rotacijskega mehanskega sistema je:

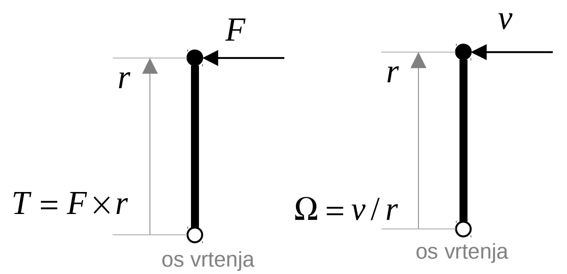
$$\mathrm{E} = \int_0^t P(\tau)\,d\tau = \int_0^t T(\tau)\,\Omega(\tau)\,d\tau$$

V rotacijskih mehanskih.sistemih vpeljemo še dve spremenljivki- (linearni) zasuk Θ [rad]:

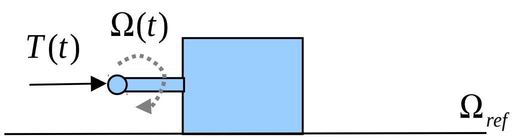
$$\Theta(t) = \int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau + \Theta(0) \rightarrow d\Theta = \Omega\,dt$$

in vrtilno količino h [Nms]

$$h(t) = \int_0^t T(\tau)\,d\tau + h(0) \rightarrow dh = T(t)\,dt$$



$$P(t) = T(t)\,\Omega(t)$$



Spremembo notranje energije rotacijskega sistema v času dt lahko izrazimo kot:

$$dE/dt = T\,\Omega \quad \rightarrow d\,\mathrm{E}_{\mathrm{potencialna}} = T\,(\Omega\,dt) = T\,d\Theta$$

$$dE/dt = T\,\Omega \quad \rightarrow d\,\mathrm{E}_{\mathrm{kinetičin}} = \Omega\,(T\,dt) = \Omega\,dh$$

$$dE/dt = T\,\Omega \quad \rightarrow d\,\mathrm{E}_{\mathrm{disipativna}} = (T\,\Omega)\,dt$$

Mehanski sistemi-osnovni elementi:

(rotacijski)

<u>Torzijska vzmet</u>; osnovni element za katerega je podana enoumna zveza med navorom in zasukom:

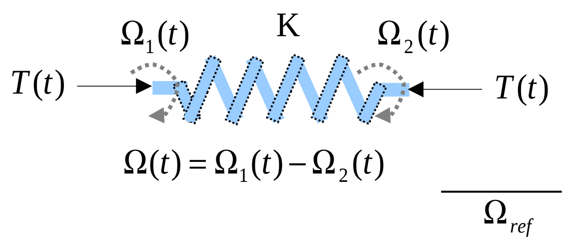
:

$$\Theta = f(T)$$

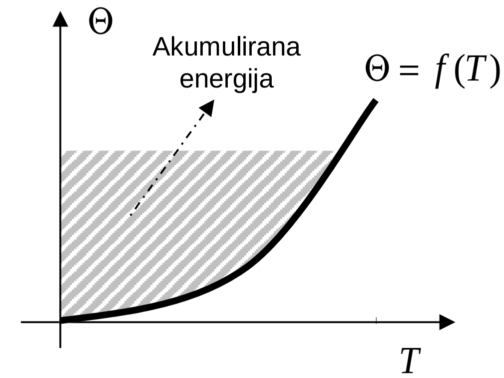
Akumulirana energija: $E = \int_0^{\Theta} T \, d\Theta$

Za idealno torzijsko vzmet velja: $\Theta = \frac{1}{K} T$

kjer je K konstanta vzmeti v [Nm/rad]➔



$$\Omega(t) = \Omega_1(t) - \Omega_2(t)$$



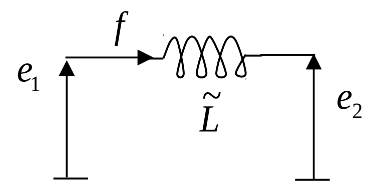
$$E = \int_0^{\Theta} T \, d\Theta = \int_0^{\Theta} K \, \Theta \, d\Theta = \frac{1}{2} K \, \Theta^2 = \frac{1}{2K} T^2$$

Za zvezo med navorom in vrtilno hitrostjo velja:

$$\frac{d}{dt} T = K \frac{d}{dt} \Theta = K (\Omega_1 - \Omega_2)$$

⟷

Predstavitev s posplošenim vezjem (analogija)



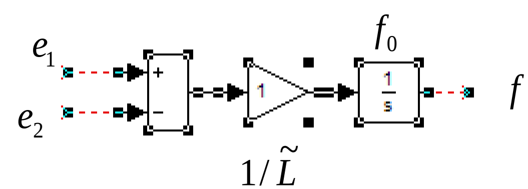
f –posplošena vzdolžna variabla

e –posplošena prečna variabla

$$\tilde{L} \frac{d}{dt} f = e_1 - e_2$$

$$\tilde{L} = 1/K$$

Predstavitev s simulacijskim diagramom:



Mehanski sistemi-osnovni elementi:
(rotacijski)

<u>Rotacijska vztrajnost:</u> osnovni element za katerega je podana enoumna zveza med vrtilno količino h in krožno hitrostjo Ω :

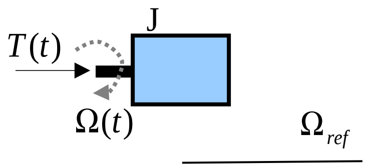
$$h = f(\Omega)$$

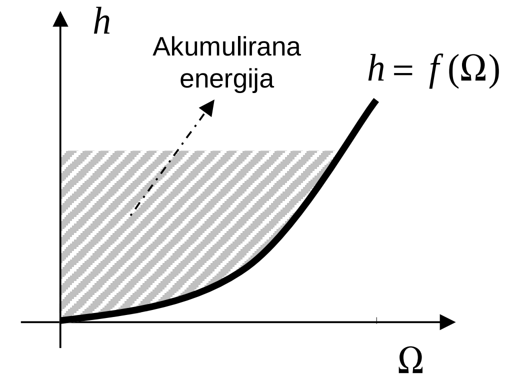
Če predpostavimo linerno odvisnost med med vrtilno količino in vrtilno hitrostjo ➔

$$h = J\,\Omega$$

kjer smo z J označili vztrajnostni moment v $\left[\mathrm{kgm}^2\right]$. Za akumulirano energijo velja:

$$\mathrm{E} = \int_0^h \Omega\, dh = \int_0^h \frac{h}{J}\, dh = \frac{1}{2\,J} h^2 = \frac{1}{2} J\,\Omega^2$$





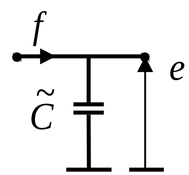
Za zvezo med navorom in vrtilno hitrostjo velja:

$$T = J\,\frac{d\Omega}{dt}$$

oziroma:

$$\Omega = \frac{1}{J}\int_0^t T(\tau)\, d\tau + \Omega_0$$

Predstavitev s posplošenim vezjem (analogija)



f –posplošena vzdolžna variabla

e –posplošena prečna variabla

$$f = \tilde{C}\,\frac{de}{dt}$$

$$e = \frac{1}{\tilde{C}}\int_0^t f(\tau)\, d\tau + e_0$$

Mehanski sistemi-osnovni elementi:
(rotacijski)

<u>Rotacijsko dušenje:</u> osnovni element za katerega je podana enoumna zveza med dušilnim navorom in vrtilno hitrostjo:

$$T = f(\Omega)$$

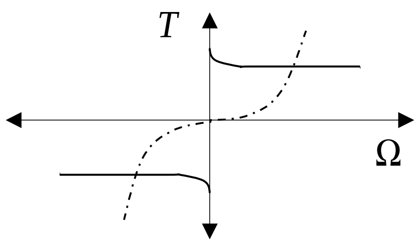
Če predpostavimo linearno zvezo med navorom in vrtilno hitrostjo (viskozno dušenje/trenje) potem velja:

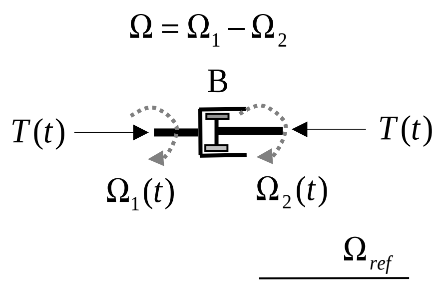
$$T = B\Omega = B(\Omega_1 - \Omega_2)$$

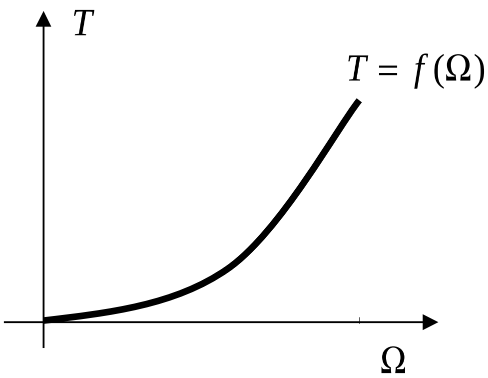
kjer je B koeficient dušenja v [Nm/s]. Moč, ki se nepovratno izgublja pri dušenju je:

$$P = T\Omega = B\Omega^2 = \frac{1}{B}T^2$$

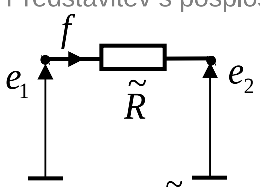
Idealni rotacijski dušilni element je torej brez dinamike, saj ne akumulira mehanske energije. Zveza med vrtilno hitrostjo in navorom je podana s statično karakteristiko. Poleg linearnega (viskoznega) dušenja v rotacijskih mehanskih sistemih pogosto upoštevamo nelinearne karakteristike, ki opisujejo Culombovo dušenje, ventilatorsko karakteristiko,.....







Predstavitev s posplošenim vezjem (analogija)



$$e_1 - e_2 = \tilde{R}\, f$$

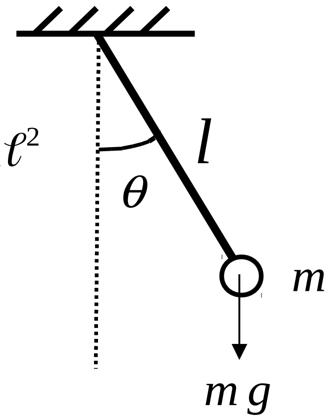
$$\tilde{R} = 1/B$$

f –posplošena vzdolžna spremenljivka

e –posplošena prečna spremenljivka

Mehanski sistemi: (rotacijski)

$$J = m\ell^2$$

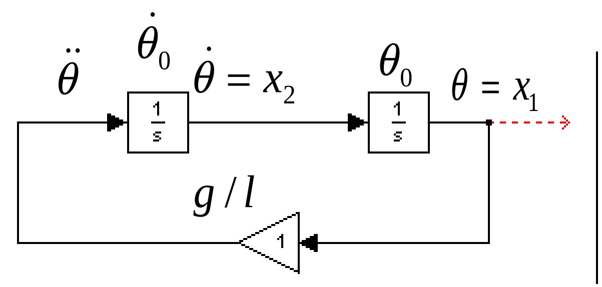


$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = mg\ell(1-\cos\theta)$$

Ker zanimarimo izgube mora biti notranja energija konstantna, torej je njen časovni odvod enak nič.

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)\right) = 0$$



$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell(\sin\theta)\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\left(m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell(\sin\theta)\right) = 0$$ možno le, če je izraz v oklepaju enak nič:

$$\Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell(\sin\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\sin\theta(t) = 0$$

Če predpostavimo majhna odstopanja okrog naravne ravnotežne lege, kjer velja:

$$\sin\theta(t) \approx \theta(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0 \qquad \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{bmatrix} x \quad ; x_0$$

Rešitev karakteristične enačbe:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow$$

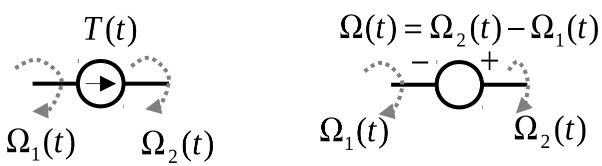
$$\lambda^2 + g/l = 0 \rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{g/l}$$

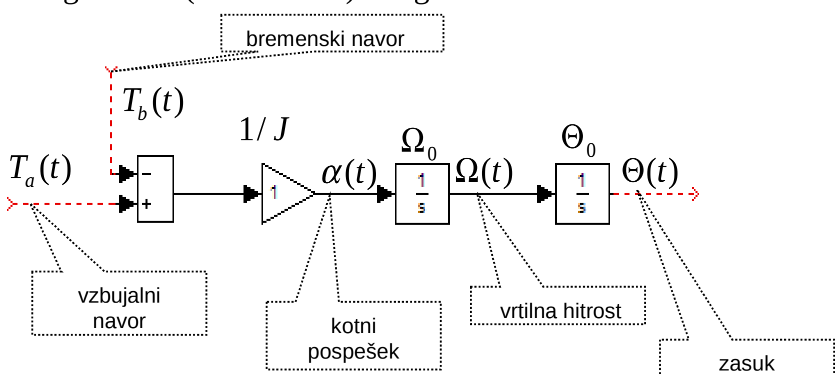
Mehanski sistemi:

(rotacijski)

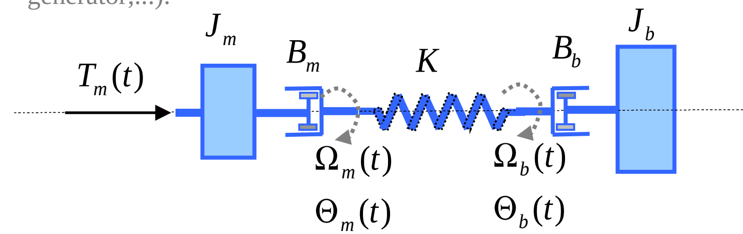
<u>Vzbujanje rotacijskih mehanskih sistemov;</u> kot vzbujalni veličini nastopajo v rotacijskih mehanskih sistemih navori in/ali vrtilne hitrosti, ki jih generirajo idealni izvori. So neodvisni od stanja v točki kjer delujejo na sistem in lahko oddajajo ali sprejemajo neskončno moč. Realne izvore opišemo tako, da jim na ustrezen način dodamo dušilne elemente.



V rotacijskih mehanskih sistemih so zasuk, vrtilna hitrost, kotni pospešek, vzbujalni in bremenski navor vedno povezani v integratorski (kinematični) verigi.



Zgled: Dvomasni rotacijski sistem (elektromotorski pogoni, turbina-generator,...):



Ravnotežna enačba:

$$\sum_i T_i = J\,\alpha = m\dot{\Omega} = m\ddot{\Theta} \rightarrow$$

$$T_m = J_m\,\ddot{\Theta}_m + B_m\,\dot{\Theta}_m + K(\Theta_m - \Theta_b) \qquad \text{pogonska stran}$$

$$K(\Theta_m - \Theta_b) = J_b\,\ddot{\Theta}_b + B_b\,\dot{\Theta}_b \qquad \text{bremenska stran}$$

Stanja sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \Theta_b \quad , & x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\Theta}_b \\ x_3 = \Theta_b \quad , & x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\Theta}_m \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$T_m = J_m\,\dot{x}_4 + B_m\,x_4 + K(x_3 - x_1)$$

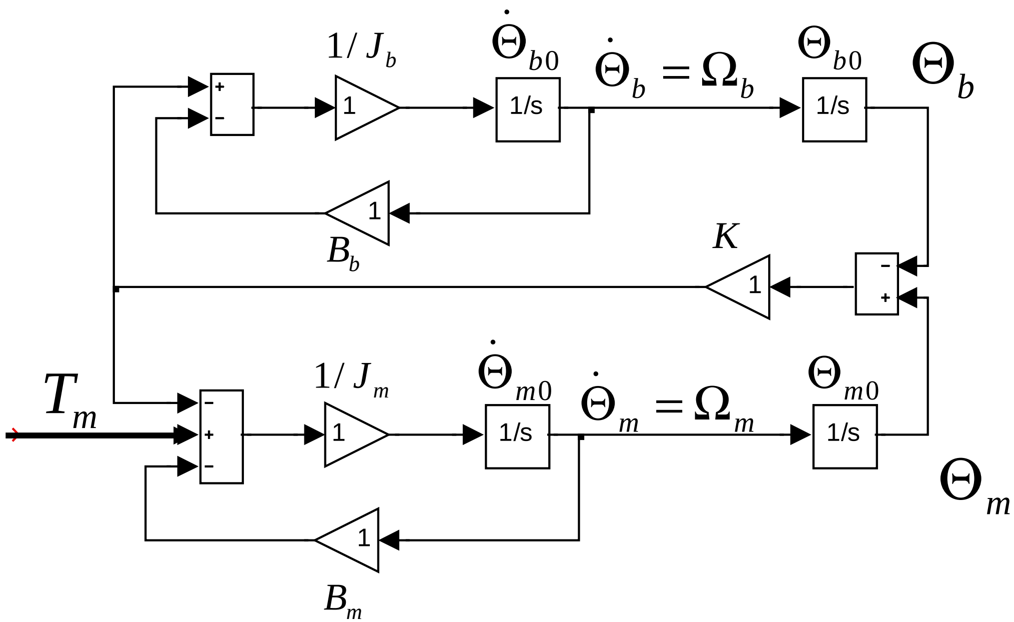
$$K(x_3 - x_1) = J_b\,\dot{x}_2 + B_b\,x_2$$

Mehanski sistemi:
(rotacijski)

Dalje sledi:

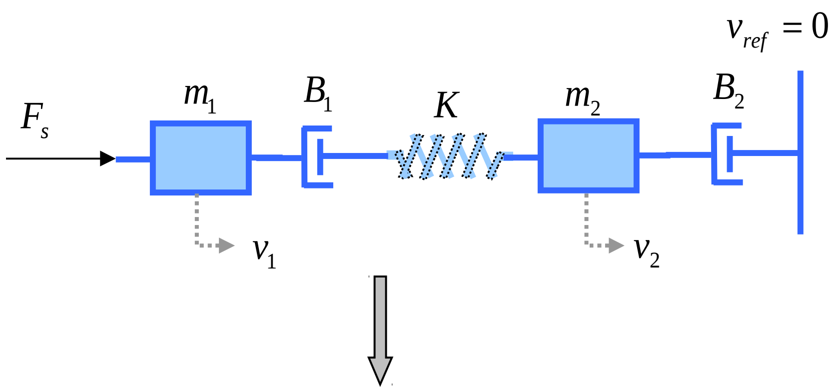
$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -K/J_b\,x_1 - B_b/J_b\,x_2 + K/J_b\,x_3\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= K/J_m\,x_1 - B_m/J_m\,x_4 - K/J_m\,x_3 + 1/J_m\,T_m\end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -K/J_b & -B_b/J_b & K/J_b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ K/J_m & 0 & -K/J_m & -B_m/J_m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1/J_m \end{bmatrix} T_m =$$

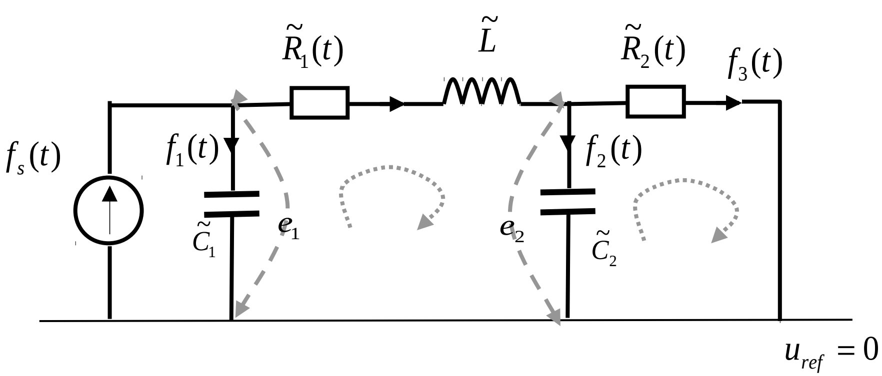
$$= Ax + bu$$



Analogije-zgled:

<u>Zgled;</u> na osnovi analogij zapišimo model mehanskega sistema s posplošenim vezjem





Ravnotežne enečbe

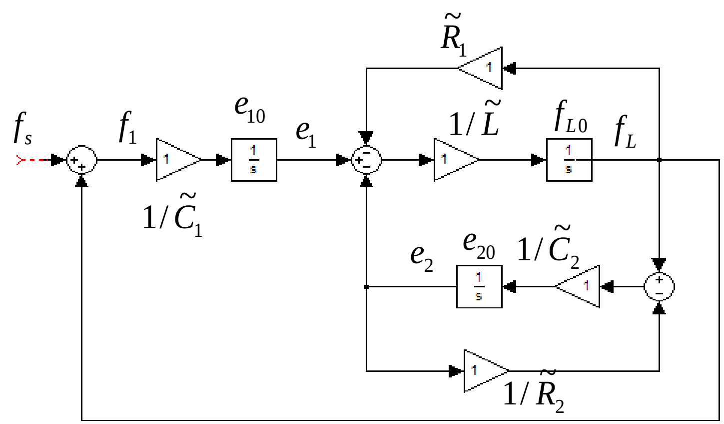
$$f_s - f_1 - f_L = 0 \quad ; \quad f_L - f_2 - f_3 = 0$$ vozliščne

$$e_1 - e_{R1} - e_L - e_2 = 0 \quad ; \quad e_2 - e_{R2} = 0$$ zančne

$$e_1 = \frac{1}{\tilde{C}_1}\int_0^t f_1\, d\tau \qquad e_2 = \frac{1}{\tilde{C}_2}\int_0^t f_2\, d\tau$$

$$e_{R1} = \tilde{R}_1\, f_L \qquad e_{R2} = \tilde{R}_2\, f_3$$

$$f_L = \frac{1}{\tilde{L}}\int_0^t e_L\, d\tau$$



Analogije-zgled:

Ob upoštevanju stanj sistema :

$$x = [e_1 \quad e_2 \quad f_L]^{\mathrm{T}} \quad \rightarrow$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{f}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\tilde{C}_1 \\ 0 & -1/\tilde{C}_2\tilde{R}_2 & 1/\tilde{C}_2 \\ 1/\tilde{L} & -1/\tilde{L} & -\tilde{R}_1/\tilde{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\tilde{C}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_s =$$

$$= Ax + bu \quad ; x_0$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x = c^T x = e_2$$

Euler-Lagrangeova metoda:

EL metoda omogoča opisovanje linearnih in nelinearnih dinamičnih sistemov na osnovi energijskih funkcij, ki jih izrazimo v “posplošenih koordinatah”. Primerna je za opisovanje mehanskih sistemov, električnih vezij, elektromagnetnih pretvornikov in lektromehanskih sistemov.

Izbira posplošenih koordinat je deloma intuitivna, kljub temu pa lahko za vse energijske akumulatorje obravnavenega sistema praviloma najdemo konsistenten nabor koordinat.

Poleg poslošenega položaja potrebujemo za opis sistema tudi prve odvode (posplošene “hitrosti”) in druge odvode (posplošeni “momenti”).

Postopek:

- izberemo koordinate, ki določajo konfiguracijo sistema,
- za posamične energijske akumulatorje zapišemo kinetično energijo v izbranih koordinatah in poiščemo pripadajoče prve odvode
- določimo še potencialno energijo in posplošene sile (vzbujalne, disipacijske)
- sistem zapišemo v obliki EL enačbe in ga prevedemo v standardno obliko:

$\Sigma_{A,B,C,D}$ ali

$\dot{x} = f(x,u)$

Lagrange-ovo funkcijo (L) izrazimo kot razliko med kinetično (*T*) in potencialno energijo (*V*) v posplošenih koordinatah:

$$L(q,\dot{q}) = \underbrace{T(q,\dot{q})}_{\text{kin. energ.}} - \underbrace{V(q)}_{\text{pot. energ.}}$$

posplošene koordinate (položaji v meh sist.)

posplošene “hitrosti”

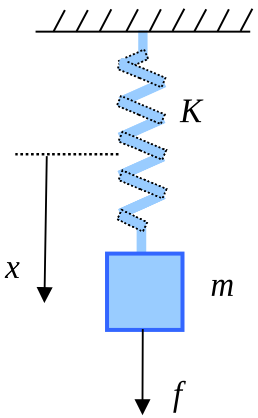
Zakon o ohranitvi energije za <u>konzervativne</u> sisteme (brez disipacije in znanjih vzbujanj):

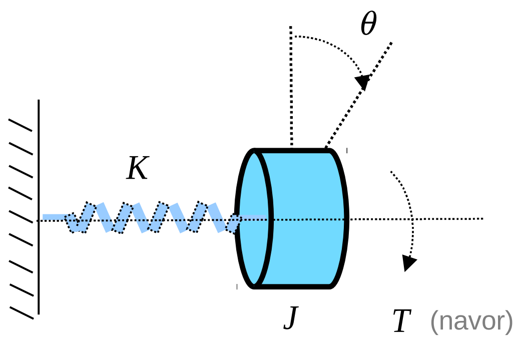
$$L = T - V = \text{konst.!} \quad \rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

Ker bomo v nadaljevanju obranavali sisteme z različno fizikalno naravo si najprej izberimo posplošene koordinate pri čemer bomo izhajali iz analogij med različnimi sistemi in njihovimi predstavitvami.

Euler-Lagrangeova metoda:

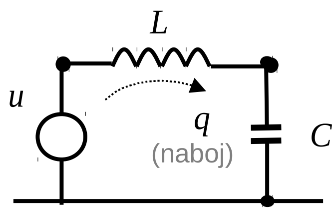


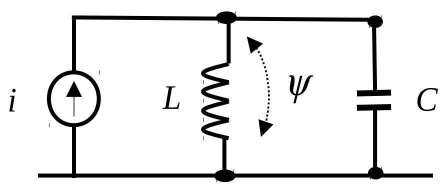


Ravnotežne enačbe:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + Kx &= f \\ J\ddot{\theta} + K\theta &= T \end{aligned}\right\}\text{meh.}$$

$$\left.\begin{aligned} L\ddot{q} + \frac{1}{C}q &= u \\ C\ddot{\psi} + \frac{1}{L}\psi &= i \end{aligned}\right\}\text{el.}$$





Torej lahko kot **posplošene koordinate** privzamemo:
•položaj oziroma kot zasuka v mehanskih sistemih in
• naboj oziroma magnetni sklep v električkih sistemih. Napetosti in toki, ki jih običajno uporabljamo za opisovanje električkih vezij, predstavljajo torej odvode pospološenih koordinat ("posplošene hitrosti"): $\dot{q} = i\ ,\ \dot{\psi} = u$

Euler-Lagrangeova metoda:

Na osnovi posplošenih koordinat lahko postavimo naslednje analogije:

	Posplošene koordinate	Posplošene hitrosti	Kinetična energija (T)	Potencial na energija (V)	Posplošene gibalne količine (momenti) (p)	Potencialne sile	Posplošene vzbujalne sile
Translacija	položaj x	hitrost $\dot{x}$	$\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$\frac{1}{2} K x^2$	$m \dot{x}$	$K x$	f
Rotacija	zasuk θ	kotna hitr. $\dot{\theta}$	$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$	$\frac{1}{2} K \theta^2$	$J \dot{\theta}$	$K \theta$	T
Zaporedno	naboj q	tok $\dot{q} = i$	$\frac{1}{2} L \dot{q}^2$	$\frac{1}{2C} q^2$	$L \dot{q}$	$\frac{1}{C} q$	u
Vzporedno	magnetni sklep ψ	napetost $\dot{\psi} = u$	$\frac{1}{2} C \dot{\psi}^2$	$\frac{1}{2L} \psi^2$	$C \dot{\psi}$	$\frac{1}{L} \psi$	i

Euler-Lagrangeova metoda:

Kinetično in potencialno energijo lahko dobimo z integracijo posplošenih gibalnih količin oziroma potencialnih sil::

$$T(q,\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} \sum_{i=0}^{N} p_i(q,\dot{q}')\, d\dot{q}_i'$$

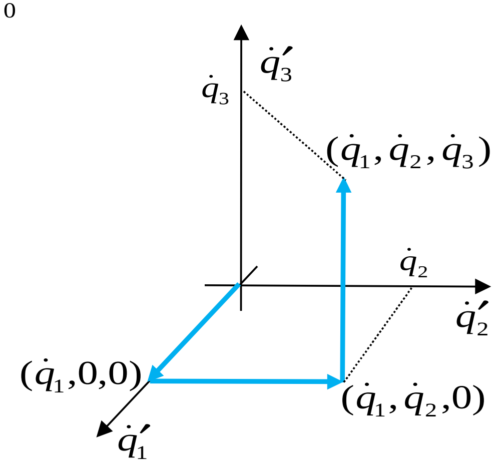
$$V(q) = \int_0^{q} \sum_{i=1}^{N} f_i(q')\, dq_i'$$

oziroma::

$$p(q,\dot{q}) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_N} \end{bmatrix} \quad ; \; f(q) = \frac{\partial V}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial q_N} \end{bmatrix}$$

Ker je rezultat neodvisen od poti integracije velja za primer N=3 ➔

$$T(q,\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}_1} p_1(q,\dot{q}_1',0,0)\, d\dot{q}_1' + \int_0^{\dot{q}_2} p_2(q,\dot{q}_1',\dot{q}_2',0)\, d\dot{q}_2' + \int_0^{\dot{q}_3} p_3(q,\dot{q}_1',\dot{q}_2',\dot{q}_3')\, d\dot{q}_3'$$



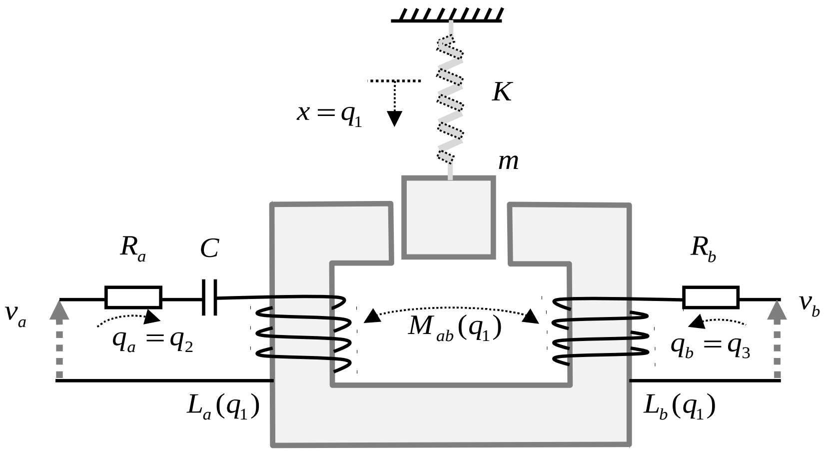
Euler-Lagrangeova metoda:

P1:

Za primer na sliki izberemo kot posplošene koordinate:

$$q_1 = x, \quad q_2 = q_a, \quad q_3 = q_b \rightarrow$$

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^{\mathrm{T}}$$



Posplošeni momenti:

$$p(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} m\dot{q}_1 \\ L_a(q_1)\dot{q}_2 + M_{ab}(q_1)\dot{q}_3 \\ L_b(q_1)\dot{q}_3 + M_{ab}(q_1)\dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Kinetično energijo dobimo z integracijo posplošenih momentov:

$$T(q,\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} \sum_{i=0}^{3} p_i(q,\dot{q}')\,d\dot{q}_i' =$$

$$= \int_0^{\dot{q}_1} m\dot{q}_1'\,d\dot{q}_1' + \int_0^{\dot{q}_2} L_a(q_1)\dot{q}_2'\,d\dot{q}_2' + \int_0^{\dot{q}_3} (L_b(q_1)\dot{q}_3' + M_{ab}(q_1)\dot{q}_2)\,d\dot{q}_3' =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}L_a(q_1)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}L_b(q_1)\dot{q}_3^2 + M_{ab}(q_1)\dot{q}_2\dot{q}_3$$

- Posamezni členi so odvisni od več kot ene spremenljivke kar je značilno za povezane elektromehanske sisteme
- Lastne in medsebojne induktivnosti so poleg snovno-geometrijskih lastnosti odvisne tudi od posplošene koordinate x (položaj).
- Predpostavili smo magnetno linearnost

Euler-Lagrangeova metoda:

Potencialno energijo dobimo z integracijo potencialnih sil:

$$f(q) = \begin{bmatrix} K\,q_1 \\ \dfrac{1}{C}\,q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$V = \int_0^{q_1} K\,q_1'\,dq_1' + \int_0^{q_2} \frac{1}{C}\,q_2'\,dq_2' = \frac{1}{2}Kq_1^2 + \frac{1}{2C}\,q_2^2$$

$$q_2 = Cu \longrightarrow \frac{1}{2C}\,q_2^2 = \frac{1}{2}\,Cu^2$$

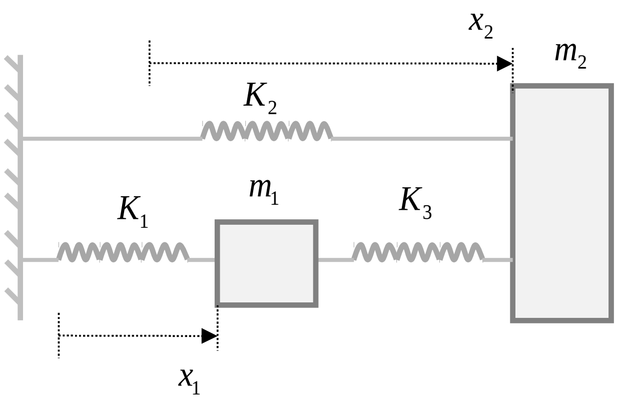
Lagrange-ova funkcija je potem:

$$L = T - V =$$

$$= \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + L_a(x)\,i_a^2 + L_b(x)\,i_b^2 + 2M_{ab}(x)\,i_a i_b - Kx_1^2 - Cu^2\right)$$

Euler-Lagrangeova metoda:

P2:



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2 + \frac{1}{2} K_3 (x_1 - x_2)^2$$

$$L = T - V$$

Euler-Lagrangeova enačba:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}}_{\text{posplošene gibalne kol.}}\right)}_{\text{pospeševalne sile}} - \underbrace{\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q}}_{\text{potencialne sile}} + \underbrace{\frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}}}_{\text{disipacijske sile}} = \underbrace{f}_{\text{zunanje (vzbujalne) sile}}$$

Pri tem za Rayleightovo disipacijsko funkcijo $\mathcal{D}$ velja:

$$D(\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} \beta_i \, \dot{q}_i^2$$

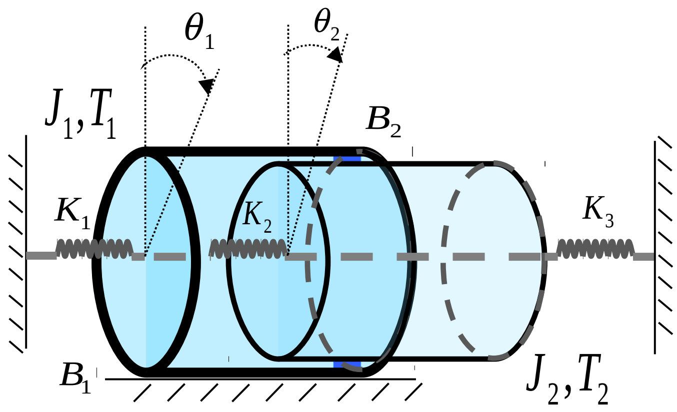
$$\frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \sum_{i=1}^{M} \beta_i \, \dot{q}_i$$

kjer M podaja število disipacijskih elementov in β_i pripadajoče dušilne koeficiente.

Z EL enačno torej opišemo gibanje sistema na osnovi ravnotežja med pospoeševalnimi, potencalnimi, disipacijskimi in zunanjimi, vzbujalnimi silami. Omogoča nam, da na sistematičen, fizikalno utemeljen način opišemo obravnavan sistem v obliki linearnih ali nelinearnih diferencialnih enačb drugega reda. Ker postopek temelji na energijskem konceptu je na ta način omogočena njabolj naravna povezava s spremenljivkami stanja. Modeli zapisani v obliki sistema diferencialnih enačb prvega reda na osnovi stanj sistema, omogočajo namreč vpeljavo množice formalnih postopkov za analizo oziroma sintezo.

Euler-Lagrangeova metoda:

P2:



$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 \theta_2^2$$

$$D = \frac{1}{2} B_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} B_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2$$

vrstni red ni pomemben, ker gre za relativno hitrost

EL enačbo razvijemo po komponentah, posebaj za θ_1 in θ_2 :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = J_1 \dot{\theta}_1 \quad \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = J_1 \ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = K_1 \theta_1 + K_2 (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} = B_1 \dot{\theta}_1 + B_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

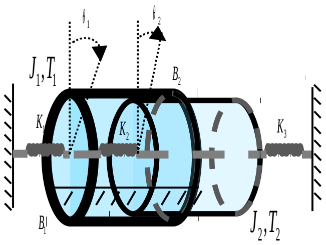
➔ za θ_1 :

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + K_1 \theta_1 + K_2 (\theta_1 - \theta_2) + B_1 \dot{\theta}_1 + B_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_1$$

➔ In podobno za θ_2 :

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + K_2 (\theta_2 - \theta_1) + k_3 \theta_3 + B_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = T_2$$

Euler-Lagrangeova metoda:



P2:

Energijsko stanje sistema je torej odvisno od zasukov in kotnih hitrosti obeh cilindrov zato je naravna izbira spremenljivk stanja sistema :

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dot{\theta}_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Vzbujanje je podano z obema navoroma: $u = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ➔

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{J_1}\left(-K_1 x_1 - K_2(x_1 - x_3) - B_1 x_1 - B_2(x_2 - x_4) + u_1\right) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{J_2}\left(-K_2(x_3 - x_1) - K_3 x_3 - B_2(x_4 - x_2) + u_2\right)
\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{K_1 + K_2}{J_1} & -\dfrac{B_1 + B_2}{J_1} & -\dfrac{K_1}{J_1} & -\dfrac{B_2}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_2}{J_2} & \dfrac{B_2}{J_2} & -\dfrac{K_2 + K_3}{J_2} & -\dfrac{B_2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right\} \rightarrow$$

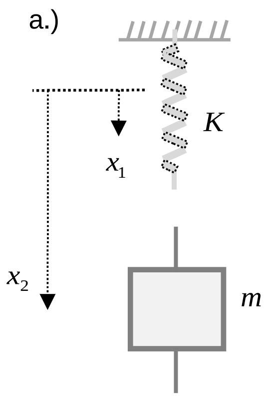
$$\underline{\underline{\dot{x} = A x + B u \quad ; x_0}}$$

Euler-Lagrangeova metoda:

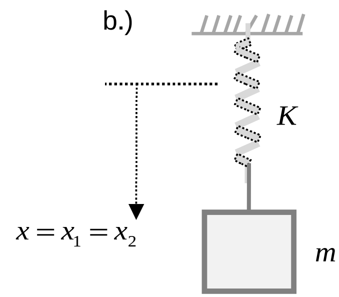
Pri postavitvi energijske L funkcije je potrebno izbrati nabor posplošenih koordinat, ki mora biti konsistenten, posamezne koordinate pa med seboj linearno neodvisne. Če ima obravnavan sistem N neovisnih energijskih akumulatorjevj e seveda potrebno izbrati tudi N posplošenih koordant, ki na enoumen način opisujejo energijsko stanje celotnega sistema. V nekaterih primerihso lahko posplošene koordinate med seboj vezane z dodatnimi pogoji (omejitvami) v obliki algebrajskih ali diferencialnih enačb:

$$f(q_1,....q_N)=0 \quad \text{ali} \quad g(\dot{q}_1,....\dot{q}_N,q_1,...q_N)=0$$

Omenjeni dodatni pogoji definirajo število prostorskih stopenj, ki ga ne smemo zamenjevati s stopnjo sistema. Poglejmo primer:



V primeru a.) imamo dva energ. akumolatorja in deve neodvisni posplošeni koordinati. Stopnja sistema je 2, prav tako je tudi število prostorskih stopenja enako 2.



$$x_1 - x_2 = 0 \quad \text{ali}$$
$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0$$

V primeru b.) lahko izberemo le eno posplošeno koordinato kar pomeni, da ima sistem le eno prostorsko stopnjo.

V splošnem velja, da je število posplošenih koordinat in s tem število prostostnih stopenj podano kot razlika med številom energijskih akumulatorjev in številom dodatnih pogojev (omejitev):

Štev.pospl. Koord.

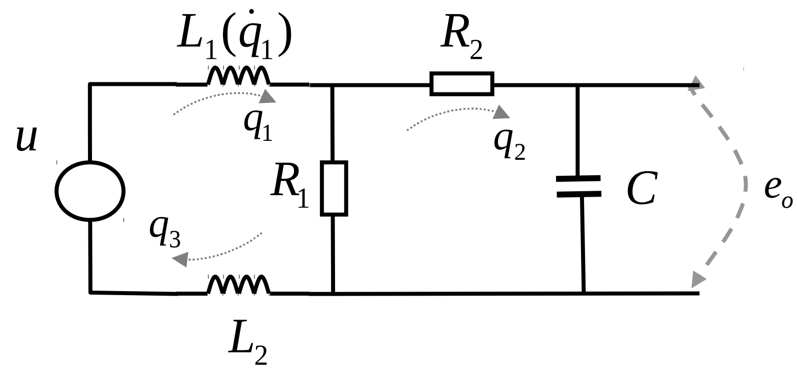
$$N_{ps} = N - N_p$$

Štev. omejitev

Štev.pospl. koord.

Štev.energ. Akum.

Euler-Lagrangeova metoda:



P3:

$$N = 3$$

Očitno velja omejitev:

$$q_1 = q_3 \quad \text{oz.} \quad q_1 - q_3 = 0$$

Izberemo lahko le dve posplošeni koordinati q_1, q_2 , sistem ima torej dve prostostni stopnji. Izhajamo iz posplošenih momentov:

$$p(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} L_1(\dot{q}_1)\,\dot{q}_1 + L_2\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

“Kinetično “ energijo dobimo z integracijo posplošenih momentov:

$$T = \int_0^{\dot{q}_1} L_1(\dot{q}_1')\,\dot{q}_1'\,d\dot{q}_1' + \frac{1}{2}L_2\dot{q}_1^2$$

Za potencialno energijo velja:

$$V = \frac{1}{2C}q_2^2$$

in za disipacijo:

$$D = \frac{1}{2}R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}R_2\dot{q}_2^2$$

Za komponento q_1 velja:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = L_1(\dot{q}_1)\,\dot{q}_1 + L_2\dot{q}_1 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = \left(L_1(\dot{q}_1) + \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} + L_2\right)\ddot{q}_1 \\ &\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\left(L_1(\dot{q}_1) + \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} + L_2\right)\ddot{q}_1 + R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = u \qquad (a)$$

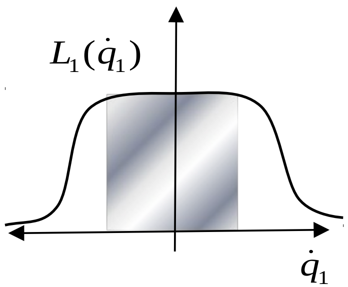
Za komponento q_2 velja:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{1}{C}q_2 \\ &\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = (R_1 + R_2)\,\dot{q}_2 - R_1\dot{q}_1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$(R_1 + R_2)\,\dot{q}_2 - R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C}q_2 = 0 \qquad (b)$$

Euler-Lagrangeova metoda:

P3:



Enačbi (a) in (b) podajata nelinearni model vezja. Če se v obravnavi omejimo na linearno področje potem velja:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} = 0 \longrightarrow L_1 = \text{konst.!}$$

Enačba (a) postane linearna tako da lahko zapišemo linerani model:

$$(L_1 + L_2)\,\ddot{q}_1 + R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = u$$

$$(R_1 + R_2)\,\dot{q}_2 - R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C}q_2 = 0$$

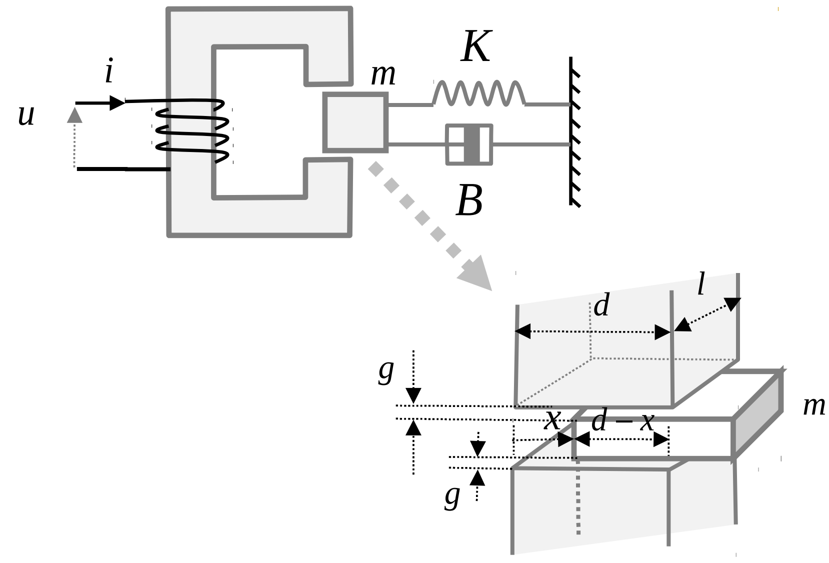
$$e_o = \frac{1}{C}q_2$$

Ker v modelu ne nastopajo q_1 in $\ddot{q}_2$ izberemo kot spremenljivke stanja:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \dot{q}_1 \\ x_2 &= \frac{q_2}{C} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} &(L_1 + L_2)\,\dot{x}_1 + R_1(x_1 - \dot{x}_2 C) = u \\ &(R_1 + R_2)\,C\dot{x}_2 - R_1 x_1 + x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dfrac{R_1 R_2}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)} & \dfrac{R_1}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)} \\ \dfrac{R_1}{C(R_1+R_2)} & -\dfrac{1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_1+L_2} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Euler-Lagrangeova metoda:

P4:



Ob predpostavljeni magnetni linearnosti velja za pospološeni moment:

$$\psi = L(x)\,i$$

Magnetno energijo dobimo z integracijo posplošenega momenta po toku:

$$T_{mag} = \int_0^i L(x)\,i'\,di' = \frac{1}{2}L(x)\,i^2$$

Silo, ki deluje na gibljiv element z maso m lahko izrazimo kot spremembo magnetne energije glede na pomik x:

$$f = -\frac{\partial T_{mag}}{\partial x} = -\frac{1}{2}i^2\frac{\partial L(x)}{\partial x}$$

Ker velja:

$$\frac{\partial T_{mag}}{\partial i} = L(x)\,i$$

sledi za elektromagnetni podsistem:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{mag}}{\partial i}\right) = \left(L(x)\,\dot{i} + i\,\frac{\partial L(x)}{\partial x}\,\dot{x}\right)$$

Če upoštevamo še ohmsko upornost navitja dobimo:

$$\underline{L(x)\,\dot{i} + i\,\frac{\partial L(x)}{\partial x}\,\dot{x} + R\,i = u}$$

Euler-Lagrangeova metoda:

P4:

Za mehanski podsistem velja:

$$T_{meh} = \frac{1}{2} m\,\dot{x}^2 \quad ;V = \frac{1}{2} K\,x^2 \quad ;D = \frac{1}{2} B\,\dot{x}^2$$

$$\rightarrow$$

$$\underline{m\ddot{x} + Kx + B\dot{x} = f}$$

Za, od položaja x odvisno, induktivnost velja:

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 l(d-x)}{2g}$$

od koder dobimo izraz za mehansko silo:

$$f = -\frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L(x)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\mu_0 l}{4g} N^2}_{C} i^2 = C\,i^2$$

Euler-Lagrangeova metoda:

P4:

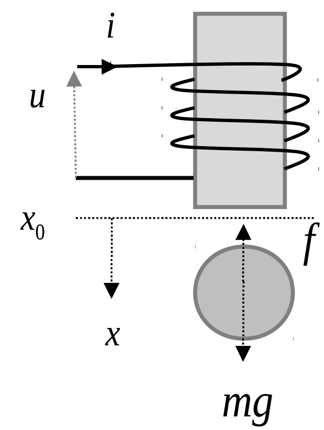
Kot spremenljivke stanja izberemo tok, položaj in hitrost:

$$x = \begin{bmatrix} i & x & \dot{x} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{L(x)}x_1 - \dfrac{dL(x)}{dx}\dfrac{1}{L(x)}x_1x_3 + \dfrac{1}{L(x)}u \\ x_3 \\ -\dfrac{B}{m}x_3 - \dfrac{K}{m}X_2 + \dfrac{C}{m}x_1^2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\dot{x} = f(x,u) \quad ; x_0$$

Euler-Lagrangeova metoda:



P5:

Za mehanski podsistem velja:

$$T_{meh} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad ; V = mg\, x \quad \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{meh}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial V}{\partial x} = -f(x,i) \rightarrow$$

$$m\ddot{x} - mg = -f(x,i)$$

Za električni podsistem velja:

$$\psi = L(x)\, i$$

$$T_{mag} = \int_0^i L(x)\, i' \, di' = \frac{1}{2} L(x)\, i^2$$

$$f(x,i) = -\frac{\partial T_{mag}}{\partial x} = -\frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L(x)}{\partial x}$$

Zaradi ohmske upornosti je disipacija :

$$D = \frac{1}{2} R i^2$$

EL enečba elektromagnetnega podsistema je potem:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{mag}}{\partial i}\right) + \frac{\partial D}{\partial i} = u$$

$$\frac{d}{dt}(L(x)i) + \frac{\partial D}{\partial i} = u \rightarrow$$

$$L(x)\dot{i} + i \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{x} + Ri = u$$

Euler-Lagrangeova metoda:

P5:

Za odvisnost :induktivnosti od položaja krogle velja:

$$L(x) = L_1 + \frac{L_0 x_0}{x} \quad \rightarrow \frac{\partial L(x)}{\partial x} = -\frac{L_0 x_0}{x^2}$$

Induktivnost z kroglo v ravnotežnem položaju:

Induktivnost brez krogle:

Za silo, ki deluje na kroglo velja:

$$f = -\frac{\partial T_{mag}}{\partial x} = -\frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L(x)}{\partial x} =$$

$$-\frac{1}{2} i^2 \left(-\frac{L_0 x_0}{x^2} \right) = \underbrace{\frac{L_0 x_0}{2}}_{=C} \frac{i^2}{x^2} = C \frac{i^2}{x^2}$$

Kot spremenljivke stanja izberemo::

$$x_1 = x \quad ; x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1 \quad ; x_3 = i \quad \rightarrow$$

Nelinerani model v prostoru stanj:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \frac{C}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \\ -\frac{R}{L(x_1)} x_3 - \frac{1}{L(x_1)} \frac{dL(x_1)}{dx_1} x_2 x_3 + \frac{1}{L(x_1)} u \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\dot{x} = f(x,u) \quad ; x_0$$

$$y = x_1$$