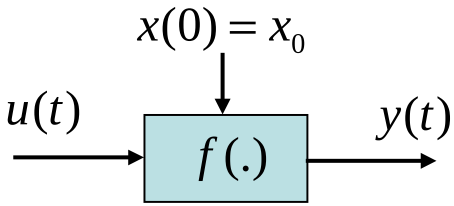
T2-Nelinearni in linearizirani modeli, ravnotežna stanja, algebra linearnih, operatorjev, modelne pretvorbe

Linearnost, linearni sistemi:



Predstavimo dinamični sistem kot preslikavo

$$y(t)=f(x_0,u) \qquad ;t\geq t_0$$

Sistem bo linearen kadar bo veljalo načelo superpozicije in homogenosti:

I. $y(t)=f(a_1x_{10}+a_2x_{20},0)=a_1f(x_{10},0)+a_2f(x_{20},0)$

II. $y(t)=f(0,b_1u_1+b_2u_2)=b_1f(0,u_1)+b_2f(0,u_2)$

III. $y(t)=f(x_0,u)=f(x_0,0)+f(0,u)$

kjer so *a* in *b* realne konstante. Prva zahteva se nanaša na superpozicijo odzivov na začetne pogoje, druga na vzbujanje, iz tretje pa izhaja, da je odziv linearnega sistema superpozicija odziva na začetne pogoje in odziva na vzbujanje. Večina realnih fizikalnih sistemov je nelinearnih, analiza takšnih sistemov je matematično zahtevna. Če fizikalna narava in področje obratovanja realnega sistema dopuščajo, se v analizi in sintezi pogosto poslužujemo linearne aproksimacije, ki omogoča uporabo množice relativno preprostih in splošnih formalnih postopkov. Ob tem moramo upoštevati, da je lineariziran sistem le aproksimacija realnega sistema in da je njegova veljavnost omejana na okolico ravnotežnega stanja. Ravnotežno stanje je lahko podano z delovno točko ali referenčno trajektorijo. Linarne ali linearizirane sisteme lahko opišemo v časovnem prostoru z linarnimi diferencialnimi enačbami *n*-te stopnje s kostantnimi ali časovno odvisnimi koeficienti, s sistemom dif. enačb prve stopnje s spremenljivkami stanja, ali v slikovnem prostoru s prenosnimi funkcijami (samo za konstantne koeficiente). Nelinearne sisteme obravnavamo praviloma v časovnem prostoru.

Postopek linearizacije temelji na razvoju nelinearne funkcije sistema v Taylor-jevo vrsto, pri čemer zahtevamo da:

- ima sistem vsaj eno ravnotežno stanje in
- da je nalinearna funkcija odvedljiva po vseh svojih argumentih.

V obravnavi realnih nelinearnih sistemov lahko splošnem nastopijp primeri, da ima sistem eno ali več ravnotežnih stanj, ali pa da ravnotežno stanje ne obstaja. Nelinarni sistem bomo v splošni obliki zapisali kot:

$$\dot{x}=f(x,u) \qquad ;x_0$$
$$y=g(x,u)$$

Ravnotežno stanje opisujeta nelinearni algebrajski enačbi:

$$0=f(x_r,u_r)$$
$$y_r=g(x_r,u_r)$$

V primeru, da iščemo nominalno trajektorijo pa velja:

$$0=f(x_r(t),u_r(t))$$
$$y_r=g(x_r(t),u_r(t))$$

http://www.mech.ubc.ca/~nagamune/MECH468/MECH550P_L4_Linearization.pdf
https://www.me.utexas.edu/~longoria/me383Q/leks/notes/Linearization_Summary.pdf
http://www.mech.ubc.ca/~nagamune/MECH468/MECH550P_L4_Linearization.pdf

Taylor-jeva in Maclaurin-ova vrsta:

a.) Skalarni primer (dim=1); naj velja: $\Delta x = x - x_r$

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x_r) + f'(x_r)\Delta x + \underbrace{\cancel{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_r)}{k!}\Delta x^k}}_{o} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$y \approx f(x_r) + f'(x_r)\Delta x$$

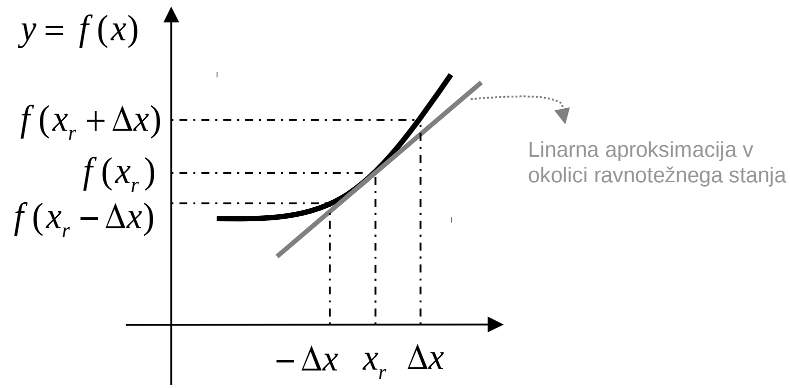
Za $x_r = 0$ ➔ Maclaurinova vrsta.

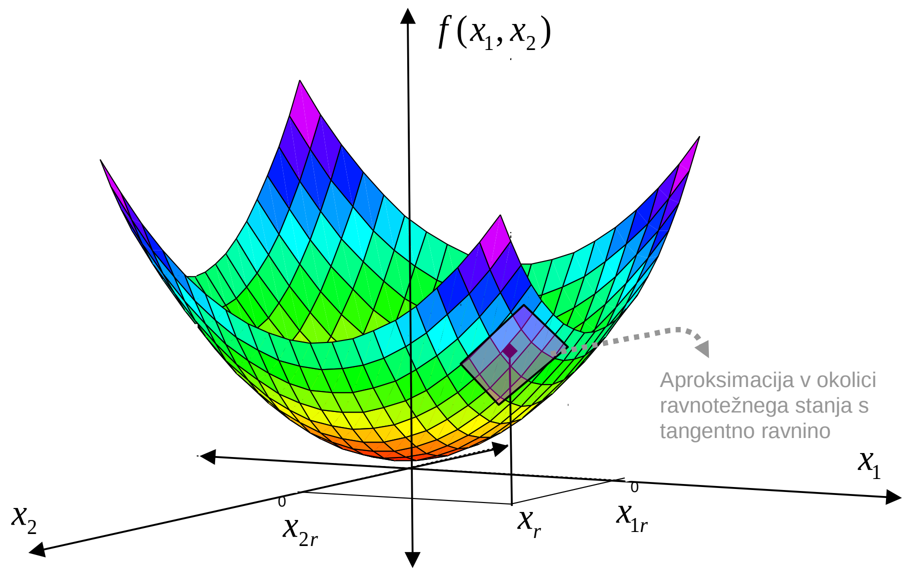
b.) dim=2,

$$\left.\begin{array}{l} x_r = \begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \end{bmatrix} \quad ; \quad \Delta x = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1r} \\ x_2 - x_{2r} \end{bmatrix} \\ y = f(x_r) + \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=x_r} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \underset{\breve{o}}{\ldots} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$y \approx f(x_r) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x_r} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x=x_r} \Delta x_2 =$$

$$f(x_r) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_r} \Delta x$$



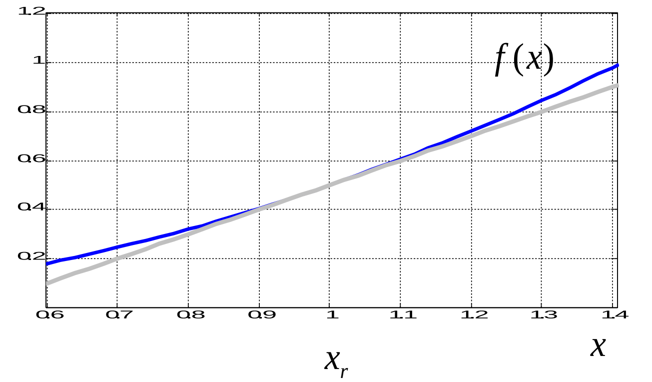


Taylor-jeva in Maclaurin-ova vrsta:

a.) **P1:**

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad ; x_r = 1 \quad \rightarrow$$

$$y \approx f(x_r) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_r} \Delta x = \frac{1}{2} + x\big|_{x=1}\Delta x = \frac{1}{2} + \Delta x$$



b.) **P2:**

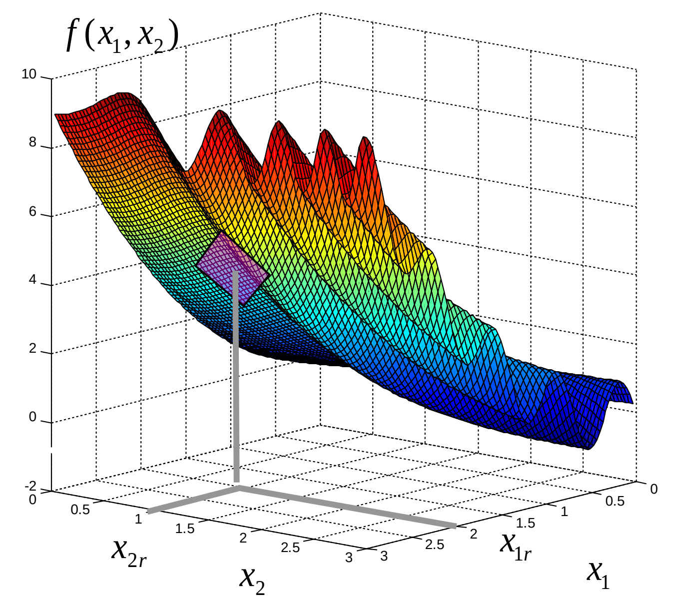
$$x_r = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + \sin(x_1 x_2^2)$$

$$\Delta y \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x_r} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x=x_r} \Delta x_2 =$$

$$= (2x_1 + x_2^2\cos(x_1 x_2^2)) \left.\right|_{x=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \Delta x_1 + (2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2))\Big|_{x=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \Delta x_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + \cos(2) & 4\cos(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$



Linearizacija dinamičnega sistema:

Nelinarni dinamični sistem (dim=n):

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad ; x_0$$

$$y = g(x,u)$$

Predpostavimo, da obstaja vsaj ena ravnotežna rešitev nelinerane algebrajske enečbe:

$$0 = f(x_r,u_r) \rightarrow$$

$$y_r = g(x_r,u_r)$$

Lineariziran sistem, ki opisuje dinamiko v okolici ravnotežnega stanja, zapišemo kot:

$$(\cancel{x_r} + \Delta x)^{\bullet} = f(x_r + \Delta x, u_r + \Delta u) =$$

$$f(\cancel{x_r}, u_r) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_r,u_r} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_r,u_r} \Delta u + \cancel{O} =$$

$$\Delta \dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_r,u_r} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_r,u_r} \Delta u$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_r,u_r} = A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{x_r,u_r} \quad ; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_r,u_r} = B = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}\right|_{x_r,u_r}$$

Za izhod sistema velja:

$$(\cancel{y_r} + \Delta y) = g(x_r + \Delta x, u_r + \Delta u) =$$

$$g(\cancel{x_r}, u_r) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_r,u_r} \Delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_r,u_r} \Delta u + \cancel{O} =$$

$$\Delta y = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_r,u_r} \Delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_r,u_r} \Delta u$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_r,u_r} = C = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{x_r,u_r} \quad ; \quad \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_r,u_r} = D = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}\right|_{x_r,u_r}$$

Lineariziran sistem:

$$\Delta \dot{x} = A_{x_r,u_r} \Delta x + B_{x_r,u_r} \Delta u$$

$$\Delta y = C_{x_r,u_r} \Delta x + D_{x_r,u_r} \Delta u$$

Linearizacija dinamičnega sistema:

V primeru, da opazujemo obnašanje sistema v okolici nominalne trajektorije je potrebno najprej poiskati rešitev:

$$0 = f(x_r(t), u_r(t))$$

$$y_r(t) = g(x_r(t), u_r(t))$$

Dalje sledi:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_r(t),u_r(t)} = A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r(t),u_r(t)} \quad ; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_r(t),u_r(t)} = B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{x_r(t),u_r(t)}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_r(t),u_r(t)} = C(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r(t),u_r(t)} \quad ; \quad \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_r(t),u_r(t)} = D(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{x_r(t),u_r(t)}$$

$$\Delta\dot{x} = A(t)\Delta x + B(t)\Delta u$$

$$\Delta y = C(t)\Delta x + D(t)\Delta u$$

Linearizacija dinamičnega sistema n-te stopnje:

P3: Nelinerni sistem s tremi stanji, dvema vhodoma in dvema izhodoma je podan kot:

$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \\ f_3(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + x_2x_3 + 3x_3^3 + u_1 - 2u_1u_2 \\ -x_2 \\ x_1x_2 - x_3^2 + u_1^2 + 3u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} x_1x_2x_3 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

Ravnotežno stanje:

$$0 = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + x_2x_3 + 3x_3^3 + u_1 - 2u_1u_2 \\ -x_2 \\ x_1x_2 - x_3^2 + u_1^2 + 3u_2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$x_{2r} = 0 \rightarrow$$

$$x_{3r} = \sqrt{u_{1r}^2 + 3u_{2r}} \rightarrow$$

$$x_{1r} = \frac{1}{2}\sqrt{3x_{3r}^3 + u_{1r} - 2u_{1r}u_{2r}} \quad ;3x_{3r}^3 + u_{1r} - 2u_{1r}u_{2r} > 0$$

$$y_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_r,u_r} = A = \begin{bmatrix} -4x_1 & x_3 & x_2 + 9x_3^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \end{bmatrix}_{x_r,u_r}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_r,u_r} = B = \begin{bmatrix} 1-2u_2 & -2u_1 \\ 0 & 0 \\ 2u_1 & 3 \end{bmatrix}_{x_r,u_r}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_r,u_r} = C = \begin{bmatrix} x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}_{x_r,u_r}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_r,u_r} = D = [0]$$

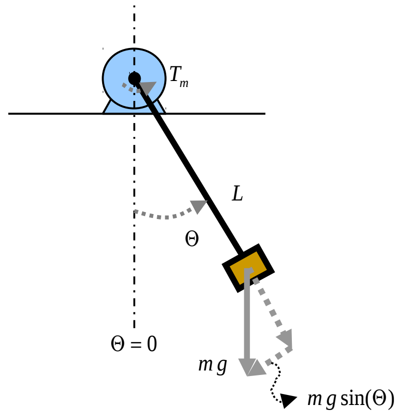
Linearizacija dinamičnega sistema:

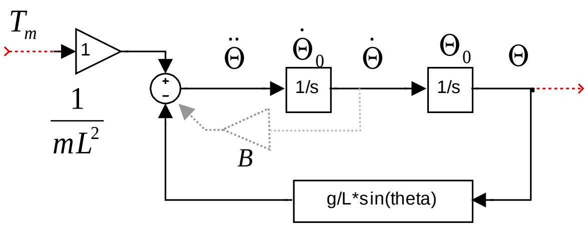
P4: Ravnotežna enečba:

$$J\,\ddot{\Theta} = \sum_i T_i$$

$$\underbrace{mL^2}_{J}\,\ddot{\Theta} = T_m - \underbrace{L\,\underbrace{mg\sin(\Theta)}_{F_\perp}}_{L\times F = L F_\perp = T_{\mathrm{brem}}} \quad \rightarrow$$

$$\ddot{\Theta} = \frac{T_m}{mL^2} - \frac{g}{L}\sin(\Theta)$$





Spremenljivke stanja:

$$x_1 = \Theta \quad , x_2 = \dot{\Theta} \quad \rightarrow$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin(x_1) + \frac{1}{m\,L^2}\,T_m \end{bmatrix} = f(x,u) \quad ; x_0$$

a.) Linarizacija v (naravnem) ravnotežnem stanju:

$$x_r = 0\,,\, u_r = T_{mr} = 0 \rightarrow$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_r, u_r} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}\right|_{x_r=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad ; b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\,L^2} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\Delta\dot{x} = A\,\Delta x + b\,\Delta u$$

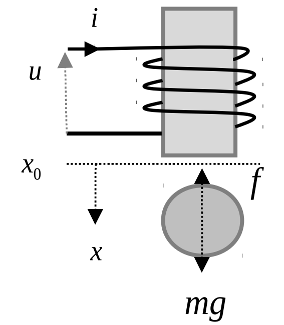
b.) Linarizacija pri poljubnem kotu Θ_r :

$$x_r = \begin{bmatrix} x_{1r} = \Theta_r \\ 0 = \dot{\Theta}_r \end{bmatrix} \rightarrow \ddot{\Theta}_r = 0, T_{mr} \neq 0 \rightarrow 0 = T_{mr} - L\,mg\,\sin(\Theta_r) \rightarrow$$

$$\sin(\Theta_r) = \frac{T_{mr}}{mgL}$$

$$A = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x_{1r}) & 0 \end{bmatrix}\right|_{x_r =}$$

Linearizacija dinamičnega sistema-MAGLEV



P5: izpeljali smno nelinearni model v obliki:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \frac{C}{m}\frac{x_3^2}{x_1^2} \\ -\frac{R}{L(x_1)}x_3 - \frac{1}{L(x_1)}\frac{dL(x_1)}{dx_1}x_2x_3 + \frac{1}{L(x_1)}u \end{pmatrix}$$

Ravnotežno stanje : $0 = f(x_r, u_r)$

$$x_r^{\mathrm{T}} = [x_{1r} \quad 0 \quad x_{3r}] = [x_0 \quad 0 \quad i_0]$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= g - \frac{C}{m}\frac{x_3^2}{x_1^2} \\ 0 &= -\frac{R}{L(x_1)}x_3 - \frac{1}{L(x_1)}\frac{dL(x_1)}{dx_1}x_2x_3 + \frac{1}{L(x_1)}u \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$x_r^{\mathrm{T}} = \left[x_0 \quad 0 \quad x_0\sqrt{\frac{mg}{C}} \right] \quad ; u_r = Rx_0\sqrt{\frac{mg}{C}}$$

V ravnotežnem stanju velja:

$$L(x_1) = L_1 + \frac{L_0 x_0}{x\big|_{x_0}} = L_1 + L_0 = L = \text{konst.!}$$

Linearizacija dinamičnega sistema-MAGLEV

Dalje velja :

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_r}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{Cx_3^2}{mx_1^3} & 0 & 2\frac{Cx_3}{mx_1^2} \\ 2\frac{L_0x_0x_2x_3}{Lx_1^3} & -\frac{L_0x_0x_3}{Lx_1^2} & -\frac{R}{L}-\frac{L_0x_0x_2}{Lx_1^2} \end{bmatrix}_{x_r} \rightarrow$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{g}{x_0} & 0 & -\frac{2}{x_0}\sqrt{\frac{Cg}{m}} \\ 0 & -\frac{2}{Lx_0}\sqrt{Cmg} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$B=\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{u_r}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$c^T=\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x_r}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Pomoč➔Matlab:

```
syms C m L R g L0 x0 positive
syms x1 x2 x3 u real

f=[x2; g-C/m*x3^2/x1^2;-R/L*x3-1/L*L0*x0/x1^2*x2*x3+1/L*u]

A=[diff(f(1),x1),diff(f(1),x2),diff(f(1),x3);diff(f(2),x1),diff(f(2),x2),diff(f(2),
x3);
   diff(f(3),x1),diff(f(3),x2),diff(f(3),x3)]
pretty(A)
‘’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’
% ali pa krajše     x=[x1;x2;x3];
                    Al=jacobian(f,x)
‘’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’’
A=subs(A,x2,0);
A=subs(A,x1,x0);
A=simple(subs(A,x3,x0*sqrt(m*g/C)));
pretty(A)
```

Harmonsko vzbujani linearni sistemi in načelo superpozicije:

Harmonske spremenljivke s konstantnimi parametri (frekvenco, amplitudo in fazo) lahko predstavimo v obliki (kompleksnih) fazorjev:

$$X\,,\omega,\varphi_x \overset{!}{=} konst.$$

$$x(t) = \underbrace{X\cos(\omega t + \varphi_x)}_{trenutna\ vrednost} \overset{Def}{\Longrightarrow}$$

$$\underbrace{\underline{X} = X e^{j\varphi_x}}_{fazor} = X\cos(\varphi_x) + j\,X\sin(\varphi_x) = X\angle\varphi_x = X_{\mathrm{Re}} + j\,X_{\mathrm{Im}}$$

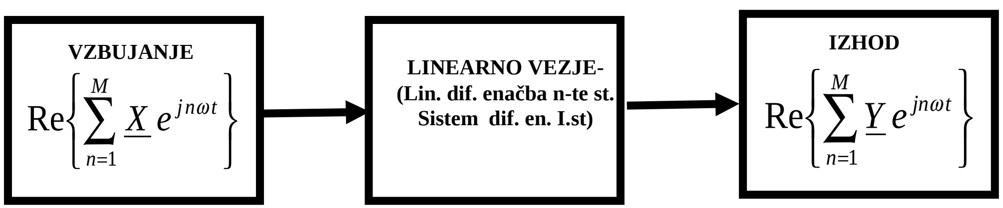
$$\Longleftarrow$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{X}\,e^{j\omega t}\right\} = X\cos(\omega t + \varphi_x) = X\cos(\varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X_{\mathrm{Im}}}{X_{\mathrm{Re}}}\right) \overset{Def}{\Longrightarrow} \underbrace{f}_{\substack{(\text{"trenutna"})\\ frekvenca}} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Ob upoštevanju načela superpozicije velja:

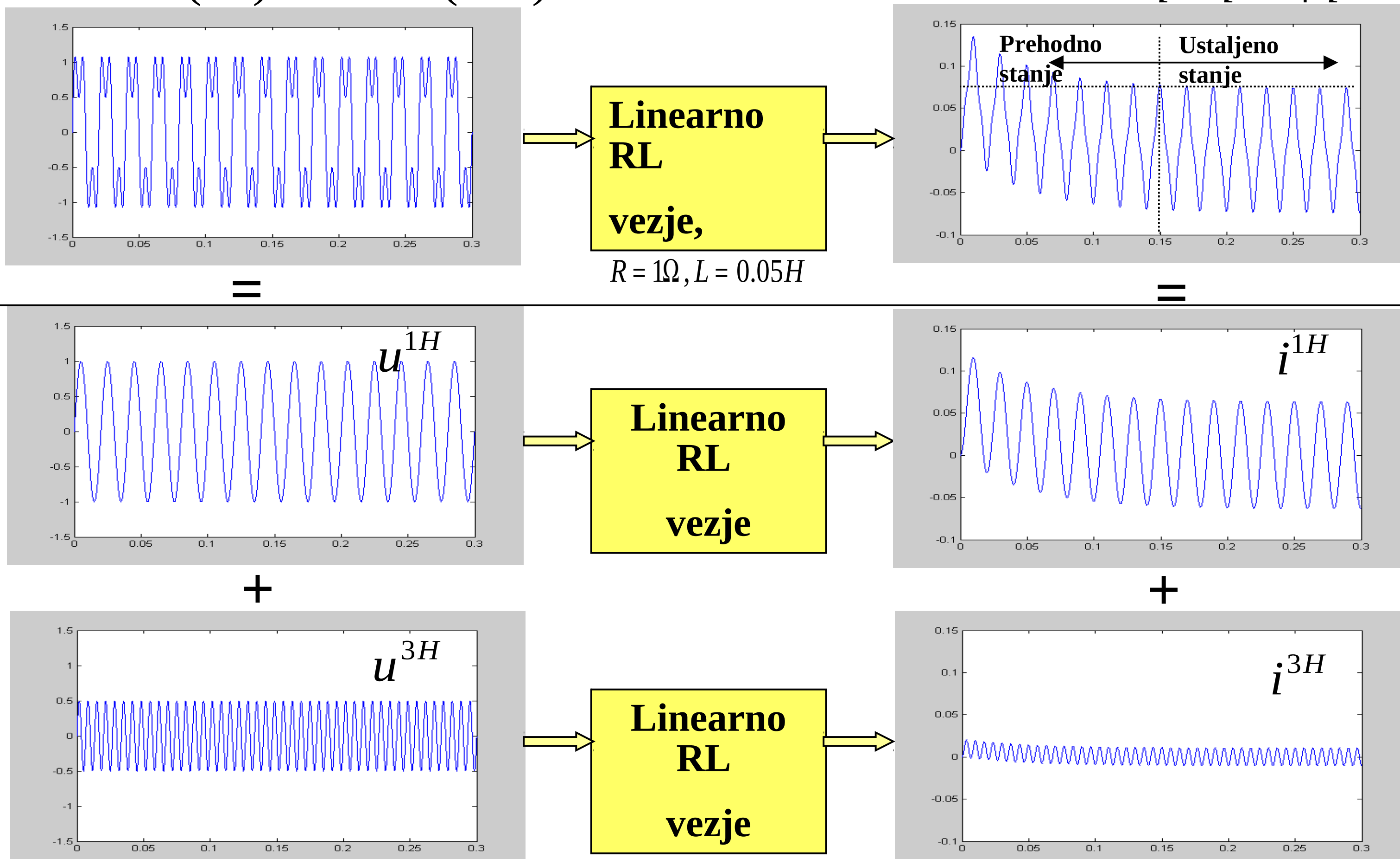
ustaljen izhod linearnega sistema, ki je vzbujano s sestavljenim harmonskim nihanjem (M-harmonikov), je superpozicija teh harmonskih nihanj, z različnimi amplitudami in fazami. Ustaljena stanja takšnih sistemov lahko tako obravnavamo s fazorji kot algebrajski problem.



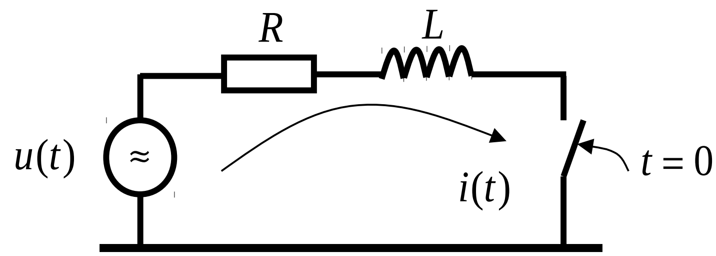
Harmonsko vzbujani linearni sistemi in načelo superpozicije:

$$u = 1\sin(\omega t) + 0.5\sin(3\omega t)$$

$$i = i^{1H} + i^{3H}$$



Harmonsko vzbujani linearni sistemi in načelo superpozicije:



Časovni prostor :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}U\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \underbrace{ai + bu}_{NDE}; \quad i(0) = 0,\, a = -\frac{1}{T},\, b = \frac{1}{L}$$

$$i = e^{at}\, i(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau = \ldots..$$

$$= \underbrace{I\sin(\omega t + \theta)}_{\text{ustaljeno stanje}} - \underbrace{I\sin(\theta)e^{-\frac{t}{T}}}_{\text{prehodno stanje}}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\; ;\theta = \varphi - \gamma \quad ;\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Fazorska rešitev:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\mathbf{Re}\left\{L\frac{d}{dt}\underline{I}e^{j\omega t} + R\underline{I}e^{j\omega t} = \underline{U}e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow$$

$$j\omega\, L\, \underline{I}e^{j\omega t} + R\underline{I}e^{j\omega t} = \underline{U}e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\angle\alpha - \gamma$$

Velja ob predpostavki:

$$\underline{I} = \text{konst.} \Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{I} = 0$$

Harmonsko vzbujani linearni sistemi in načelo superpozicije:

Kako pridemo do ustaljene fazorske rešitve, če predpostavimo sestavljeno harmonsko vzbujanje in linearno vezje ? Zaradi superpozicije je skupna rešitv sestavljena iz k-tih delnih rešitev:

$$\underline{I} = \sum_k \underline{I}_k = \sum_k \underline{U}_k / \underline{Z}_k =$$

$$\sum_k \underline{U}_k /(R + jk\omega L)$$

Za obravnavan zgled torej dobimo:

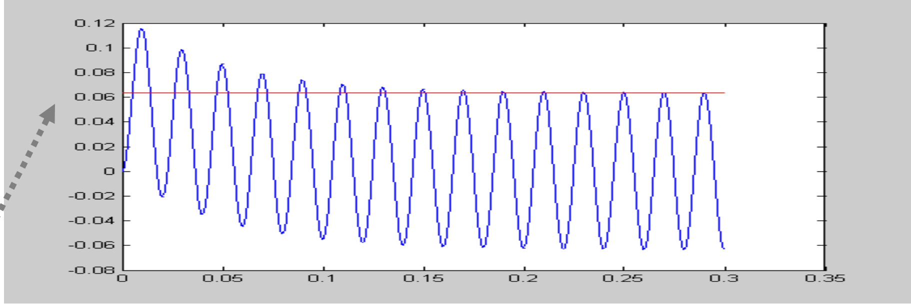
$$\left.\begin{array}{l} \underline{U}_1 = 1 + j0\,V\,; \underline{U}_3 = 0.5 + j0\,V \\ R = 1\Omega \quad ; L = 0{,}05\,H \\ \underline{Z}_1 = 1 + j\omega L = 1 + j15{,}708\,\Omega \\ \underline{Z}_3 = 1 + j3\omega L = 1 + j47{,}124\,\Omega \end{array}\right\} \rightarrow$$

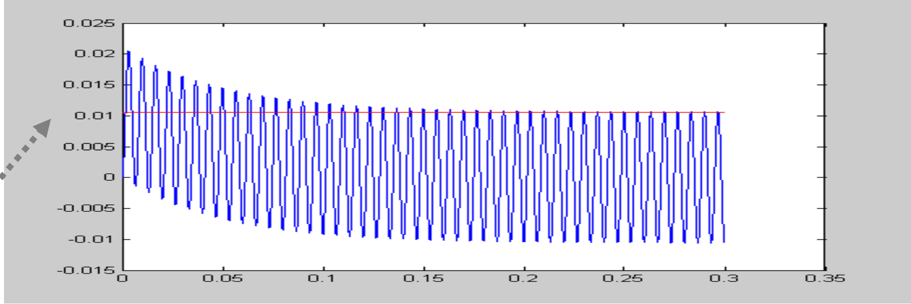
$$\underline{I}_1 = 0{,}004 - j0{,}0634\,A \quad (|\underline{I}_1| = 0{,}0635\,A)$$

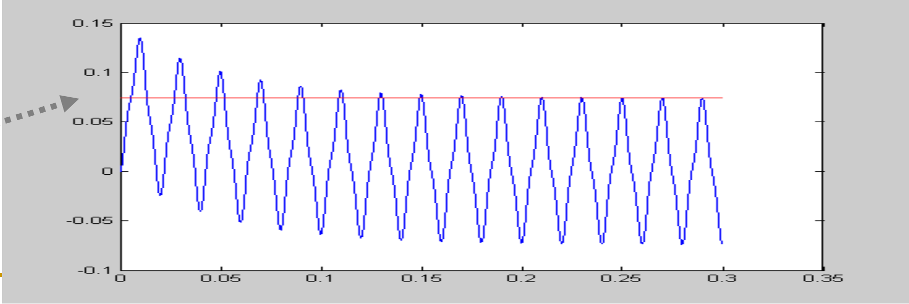
$$\underline{I}_3 = 0{,}0002 - j0{,}0106\,A\,(|\underline{I}_3| = 0{,}0106\,A)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 =$$

$$0{,}0042 - j0{,}074\,A \;\; (|\underline{I}| = 0.0741\,A)$$





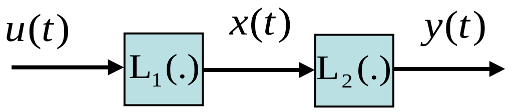


Algebra linearnih operatorjev:

Linearne dinamične sisteme lahko zapišemo v operatorski notaciji kot:

$$y(t) = \mathrm{L}(u(t))$$

Vpeljana notacija omogoča enostavno obravnavo linarnih diferencialnih enačb v algebrskem smislu. V primeri zaporedne vezave dveh operatorjev velja:



$$\mathrm{I.}\ y(t) = \mathrm{L}_2(x(t)) = \mathrm{L}_2(\mathrm{L}_1(u(t))) =$$

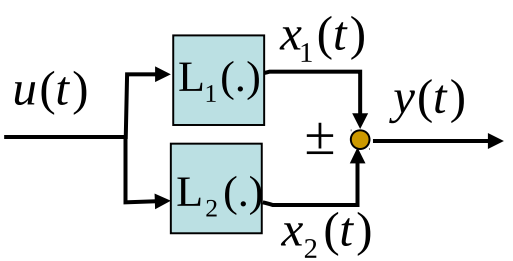
$$\mathrm{L}_2\mathrm{L}_1(u(t)) = \mathrm{L}_1\mathrm{L}_2(u(t)))$$

$$\mathrm{II.}\ y(t) = \mathrm{L}(\mathrm{L}(\ldots\mathrm{L}(\mathrm{L}(u(t))\ldots) = \mathrm{L}^n(\mathrm{u}(t))$$

Za vzporedno vezavo pa velja:

$$\mathrm{III.}\ y(t) = \mathrm{L}_1(u(t)) \pm \mathrm{L}_2(u(t)) =$$

$$(\mathrm{L}_1 \pm \mathrm{L}_{21})(u(t))$$



Operatorski polinom lahko zapišemo v obliki:

$$\mathrm{IV.}\ y(t) = (\mathrm{L}_n\mathrm{L}^n + \mathrm{L}_{n-1}\mathrm{L}^{n-1} + \ldots\mathrm{L}_1\mathrm{L}^1 + \mathrm{L}_0)(\mathrm{u}(t))$$

V gornjem primeru seveda ne gre za običajni polinom, saj z naotacija implicira vzporedno in zaporedno vezavo množice operatorjev. Kljub temu pa lahko nad tovrstnimi operatorskimi polinomi uporabimo pravila, ki veljajo v algebri polinomov. Npr.

$$y(t) = (\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3)(\mathrm{u}(\mathrm{t}))$$

$$(\mathrm{L}_1^2 + (\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3)\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2\mathrm{L}_3)(u(t))$$

Označimo z D operator odvajanja $D := d/dt$. Za primer polinomskega operatorja:

$$y(t) = (D+2)(D+1)(u(t))$$

velja dalje:

$$y(t) = (D^2 + 3D + 2)(u(t))$$

Gornji izraz predstavlja torej operatorski zapis navadne diferencialne enačbe drugega reda:

$$y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3\frac{du(t)}{dt} + 2u(t)$$

Vsako navadno diferencialno enačbo n-tega reda

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y =$$

$$b_0 u + b_1 u^{(1)} + \ldots + b_m y^{(m)} \quad ; m \le n$$

lahko torej v operatorski notacijo zapišemo kot:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)y =$$

$$(b_0 + b_1 D + \ldots + b_m D^m)u \quad ; m \le n$$

Algebra linearnih operatorjev:

Vsakemu od nič različnemu operatorju pripada inverzni operator tako, da velja:

$$\text{V.}\quad y(t) = \mathrm{L}^{-1}(\mathrm{L}(u(t)) = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{L}(u(t)) = u(t)$$

Inverzni operator ima pomebno vlogo pri vhodno-izhodnem opisovanju sistemov. Če za nek sistem npr. velja:

$$\mathrm{L}_1(y(t)) = \mathrm{L}_2(u(t))$$

potem sledi: $\mathrm{L}_1^{-1}\mathrm{L}_1(y(t)) = \mathrm{L}_1^{-1}\mathrm{L}_2(u(t)) \rightarrow$

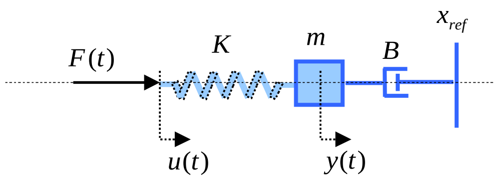
$$y(t) = \frac{\mathrm{L}_2}{\mathrm{L}_1}(u(t))$$

Naosnovi gornje ugotovitve lahko definiramo prenosni operator za primer NDE n-tega, ki smo jo zapisali v obliki:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)y =$$
$$(b_0 + b_1 D + \ldots + b_m D^m)u \quad ; m \le n$$

Dalje sledi:

$$\text{VI.}\quad y(t) = \frac{b_m D^m + \ldots + b_1 D + b_0}{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0} u(t) = \mathrm{G}(D)u(t)$$



Za mehanski sistem na sliki smo izpeljali:

$$\ddot{y} + B/m\,\dot{y} + K/m\,y = K/m\,u \rightarrow$$
$$(D^2 + B/mD + K/m)y = K/m\,u \rightarrow$$
$$y = \frac{K/m}{(D^2 + B/mD + K/m)}u$$
$$y = G(D)u$$

Prenosni operator podaja torej vhodno- izhodno zvezo v časovnem prostoru med vzbujalno veličino in izhodom sistema.

Modelne pretvorbe:

a.) Naj bo linearni sistem podan v obliki NDE n-te stopnje:

$$y^{(n)} + a_{n-1} \underbrace{y^{(n-1)}}_{:=x_n} + \ldots + a_1 \underbrace{y^{(1)}}_{:=x_2} + a_0 \underbrace{y}_{:=x_1} = b_0 u$$

Stanja sistema vpeljemo na osnovo izhoda in odvodov do stopnje n-1

$$x_1 = y\,,\, x_2 = y^{(1)}\,,\ldots,\, x_n = y^{(n-1)} \quad \rightarrow$$
$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2\,,\, \dot{x}_2 = (y^{(1)})^{\bullet} = y^{(2)} = x_3\,,\ldots,$$
$$\dot{x}_n = y^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1} x_n + b_0 u$$

Oziroma zapisano v matrični obliki;

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u$$
$$= Ax + bu \quad ; x_0$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} x = c^{\mathrm{T}} x$$

b.) Naj bo linearni sistem podan v splošni obliki NDE n-te stopnje

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y =$$
$$b_0 u + b_1 u^{(1)} + \ldots + b_m u^{(m)} \quad ; m = n$$

kjer smo predpostavili, da je $m=n$. V operatorski notaciji lahko gornjo enačbo zapišemo tudi v obliki:

$$(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0) y =$$
$$(b_0 + b_1 D + \ldots + b_m D^m) u$$

Enačbo pomnožimo z inveznim operatorjem D^{-n} (kar dejansko pomeni n-kratno integracijo !) in dobimo:

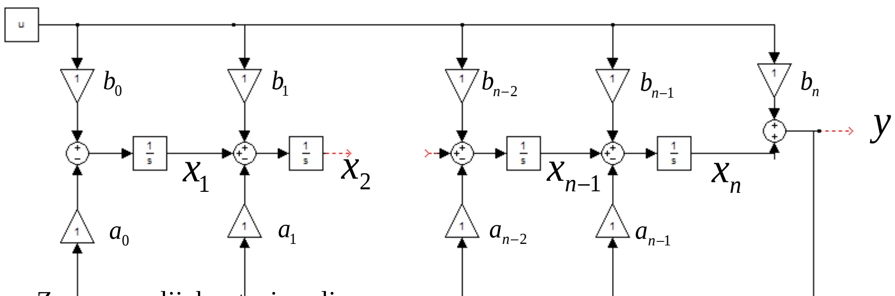
$$(1 + a_{n-1} D^{-1} + \ldots + a_1 D^{-n+1} + a_0 D^{-n}) y =$$
$$(b_0 D^{-n} + b_1 D^{-n+1} + \ldots + b_{n-1} D^{-1} + b_n) u$$

Izrazimo izhod y in preuredimo:

$$y = b_m u + (-a_0 y + b_0 u) D^{-n} + (-a_1 y + b_1 u) D^{-n+1} + \ldots + (-a_{n-1} y + b_{n-1} u) D^{-1} =$$
$$= \underbrace{D^{-1}((-a_{n-1} y + b_{n-1} u) + \underbrace{D^{-1}((-a_{n-2} y + b_{n-2} u) + \ldots + \underbrace{D^{-1}(-a_0 y + b_0 u)}_{:=x_1} \ldots)}_{:=x_{n-1}}}_{:=x_n} + b_m u$$

Modelne pretvorbe:

Če inverzni operator D^{-1} nadomestimo z integratorjem lahko podamo simulacijski diagram:



Za spremenljivke stanja velja:

$$\dot{x}_1 = -a_0 x_n + (b_0 - a_0 b_m)u$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_n + (b_1 - a_1 b_m)u$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1} x_n + (b_{n-1} - a_{n-1} b_m)u$$

oziroma v matrični notaciji:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$= Ax + bu \quad ; x_0$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} x + b_n u = c^{\mathrm{T}} x + du$$

II. Pridružena oblika

c.) dualna oblika: enečbo

$$(1 + a_{n-1}D^{-1} + \dots + a_1 D^{-n+1} + a_0 D^{-n})y =$$
$$(b_0 D^{-n} + b_1 D^{-n+1} + \dots + b_{m-1}D^{-1} + b_m)u$$

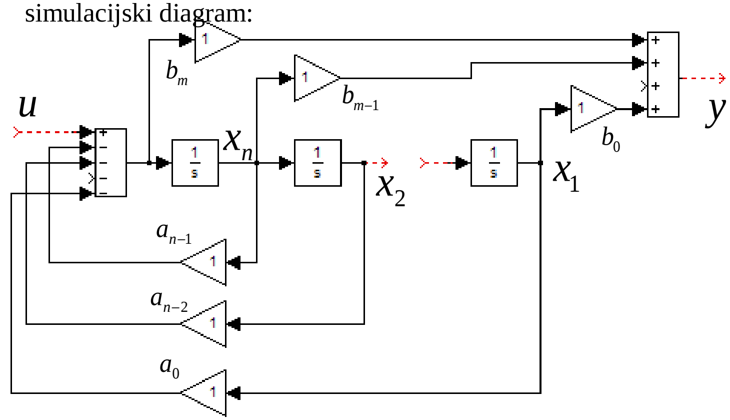
izrazimo z vpeljavo nove pomožne spremenljivke z:

$$z = (1 + a_{n-1}D^{-1} + \dots + a_1 D^{-n+1} + a_0 D^{-n})^{-1} u$$
$$y = (b_0 D^{-n} + b_1 D^{-n+1} + \dots + b_{m-1}D^{-1} + b_m)\, z$$

Prvo enačbo razrešimo na *u* in preuredimo:

$$u = (1 + a_{n-1}D^{-1} + \dots + a_1 D^{-n+1} + a_0 D^{-n})\, z \rightarrow$$
$$z = u - (a_{n-1}D^{-1} + \dots + a_1 D^{-n+1} + a_0 D^{-n})\, z$$

Izraz v oklepaju predstavlja n-kratno (zaporedno) integracijo pomožne spremenljivke *z*. Ob upoštevanju izhodene enačbe lahko podamo simulacijski diagram:



Modelne pretvorbe:

Za vpeljane spremenljivke stanja velja :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 + -a_{n-1}x_n + u\end{aligned}$$

oziroma v matrični notaciji:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1}\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} u$$

I. Pridružena oblika

$$= Ax + bu \quad ; x_0$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \dots & b_{m-1} - b_m a_{n-1}\end{bmatrix} x + b_n u = c^{\mathrm{T}} x + du$$

Povezavo med obema dualnima oblikama podaja torej torej enostavna substitucija:

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow A^{\mathrm{T}}\\ b &\leftrightarrow c\\ c^{\mathrm{T}} &\leftrightarrow b^{\mathrm{T}}\\ d &\leftrightarrow d\end{aligned}$$

Bodite pozorni, da sistemske matrike obeh modelov v eksplicitni obliki vključujeta koeficiente **karakteristične enačbe**:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Njegove rešitve imenujemo **lastne vrednosti**:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \lambda_i \;; i = 1, \dots, n$$

Lastne vrednosti, ki so lahko realne in različne (enostavne l.v.) ali večkratne ali konjugirano kompleksne, odločilno vplivajo na dinamične lastnosti in stabilnost obravnavanega sistema. Pod določenimi struktirnimi pogoji lastne vrednosti sistemske matrike *A* sovpadajo s **poli** prenosne funkcije *G(s)*.

poli P.F $\subseteq$ lastne vrednosti sist.matrike A

Modelne pretvorbe:

Za obravnavan linearni dinamični sistem (LDS) smo torej izpeljali dve različni obliki kar pomeni, da predstavitev v prostoru stanj ni enoumna. Dejansko lahko vsak LDS podamo v neskončno mnogo oblikah, če vpeljemo nesingularno linearno transformacijo stanj sistema. Naj bo izhodiščni model (original) podan v standardni obliki:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; x_0$$
$$y = Cx + Du$$

Vpeljimo nova stanja z, ki jih z originalnimi stanji povezuje nesingularna linearna transformacija T:

$$z = T\,x \quad ; \quad x = T^{-1} z \rightarrow$$
$$(T^{-1} z)^{\bullet} = AT^{-1} z + Bu \rightarrow$$
$$\dot{z} = \underbrace{TAT^{-1}}_{A_t} z + \underbrace{TB}_{B_t} u$$
$$y = \underbrace{CT^{-1}}_{C_t} z + Du$$

Ker je transformacijska matrika T konstantna sledi dalje:

$$\dot{z} = A_t\, z + B_t u \quad ; z_0 = T\,x_0$$
$$y = C_t\, z + Du$$

Transformiran (ekvivalentni) sistem ohranja strukturne in dinamične lastnosti originala (invarianca). V smislu matrične algebre predstavljajo tovrstne transformacije prehod v nov koordinatni sistem (novo bazo). Razumljivo, da se pri tem lastnosti izhodiščnega dinamičnega sistema ne spremenijo, spremeni se le pogled na gibanje sistema v novih koordinatah. Izmed množice možnih transformacij so za analizo pomembne predvsem tiste, ki vodijo na I. in II. pridruženo obliko oziroma transformacija, ki vodi na diagonalno obliko.

d.) **diagonalna oblika**; na osnovi karakterističnega polinoma sistemske matrike A, lahko izračunamo lastne vrednosti. Za primer enostavnih lastnih vrednosti lahko izračunamo n pripadajočih (neodvisnih) lastnih vektorjev, ki napenjajo vektorski prostor X:

$$(\lambda_i I - A) v_i = 0 \quad ; i = 1, \ldots n \quad ; v_i \neq 0$$

Izračunane lastne vektorje povežemo v modalno matriko M:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$$

ki je vedno nesingularna saj so lastni vektorji linearno neodvisni. S transformacijo nad izhodiščnim sistemom dobimo v novih koordinatah:

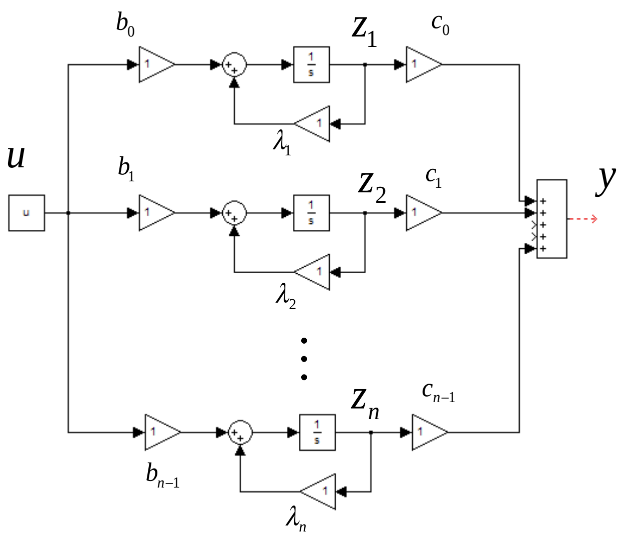
$$z = V\,x \quad ; \quad x = V^{-1} z \rightarrow$$
$$\dot{z} = VAV^{-1} z + VBu = \Lambda\, z + \hat{B}u \quad ; z_0 = V^{-1} x_0$$
$$y = CV^{-1} z + Du = \hat{C}x + Du$$
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Diagonalna oblika je najbolj nazorna saj direkno izraža vse relevantne lastnosti (struktura, stabilnost, splošna rešitev) obravnanega sistema v eksplicitni obliki. Uporabljamo jo tako v analizi, kot tudi v načrtovanju vodenja. Transformiranja stanja z imenujemo tudi *lastni načini*. Diagonalni obliki v prostoru stanj ustreza v slikovnem prostoru prenosna funkcija *G(s)*, ki je izražena v obliki parcialnih ulomkov.

Posebni primeri nastopajo v primeru večkratnih oziroma konjugirano kompleksnih lastnih vrednosti.

Modelne pretvorbe:

Simulacijski digram enovhodnega/enoizhodnega modela v diagonalni obliki:



Iz strukture modela oziroma njegovega simulacijskega diagrama, je razvidno kako krmilni signal vpliva (če sploh) na posamezne lastne načine in kakšen je njihov vpliv na izhod sistema. Prav tako lahko takoj ocenimi stabilnost posameznih lastnih načinov, ki jo pogojujeo pripadajoče lastne vrednosti. Zaradi preproste dinamike prvega reda, ki opisuje gibanje lastnih načinov, lahko za podano vzbujaje in začetne pogoje enostavno izračunamo tudi njihov odziv.

d1.) Večkratne lastne vrednosti; v primeru večkratnih lastnih vrednosti popolna diagonalna oblika v splošnemni ni možna. Če obstaja samo en lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti z algebrajsko večkratnostjo *m*, matrike *A* ni možno diagonalizirat. V tem primeru vpeljemo posplošene lastne vektorje, matriko *A* pa lahko transformiramo v Jordan-ovo matriko:

$$(\lambda_i I - A) v_{i+1} = v_i \quad ; i = 1 \ldots m$$

$$\lambda_i = (\underbrace{\lambda_1 \ldots \lambda_1}_{m\times}, \lambda_{m+1}, \ldots \lambda_n) \rightarrow$$

$$J = V^{-1} A V = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \ldots 0 & & & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_{m+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & \ldots & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Modelne pretvorbe:

d2.) Konjugirano kompleksne lastne vrednosti; v tem primeru imajo tudi pripadajoči lastni vektorji in transformirana stanja kompleksno obliko. Formalno to ne predstavlja nobene omejitve, iz praktičnih razlogov in predvsem interpretacije pa je seveda primernejša čisto realna oblika. Prehod omogoča enostavna transformacija, ki jo vpeljemo nad matriko lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Naj npr. spekter obravnavanega sistema sestavljeno realne in konjugirano kompleksne lastne vrednosti v naslednji obliki:

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \delta_1 + j\omega_1 & 0 & \ldots 0 & & & & \ldots & 0 \\ 0 & \delta_1 - j\omega_1 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_3 & & & & & \\ & & & \delta_4 + j\omega_4 & & & & \\ & & & & \delta_4 - j\omega_4 & & & \\ & & & & & \lambda_6 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \omega_1 & \ldots 0 & & & & \ldots & 0 \\ -\omega_1 & \delta_1 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_3 & & & & & \\ & & & \delta_4 & \omega_4 & & & \\ & & & -\omega_4 & \delta_4 & & & \\ & & & & & \lambda_6 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Vpeljimo kompleksno transformacijsko matriko:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 & \ldots 0 & & & & \ldots & 0 \\ 1/2 & j/2 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & & \\ & & & 1/2 & -j/2 & & & \\ & & & 1/2 & j/2 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Dalje sledi:

$$\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots 0 & & & & \ldots & 0 \\ j & -j & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & j & -j & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\hat{\Lambda} = \underline{T}^{-1}\underline{\Lambda}\,\underline{T} = \underline{T}^{-1}(\underline{V}A\underline{V}^{-1})\underline{T} = (\underline{T}^{-1}\underline{V})A(\underline{V}^{-1}\underline{T}) = \hat{V}A\hat{V}^{-1} =$$

Tudi transformirana matrika lastnih vektorjev postane realna in ima sledečo strukturo:

$$\hat{V} = \underline{T}^{-1}\underline{V} = [\mathrm{Re}(v_1)\ \mathrm{Im}(v_1)\ v_3\ \mathrm{Re}(v_4)\ \mathrm{Im}(v_4)\ v_6 \ldots v_n]$$

$$\hat{V}^{-1} = \underline{V}^{-1}T = \underline{W}\,\underline{T} = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{Re}(w_1) \\ 2\,\mathrm{Im}(w_1) \\ w_3 \\ 2\,\mathrm{Re}(w_4) \\ 2\,\mathrm{Im}(w_4) \\ \ldots\ldots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Modelne pretvorbe:

e.) Pretvorbo modela v prostoru stanj v vhodno/izhodni obliko v slikovnem prostoru dobimo z Laplace-ovo transformacijo stanj, vhodov in izhodov. Pri tem upoštevamo da velja:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \quad ; x_0 \\ y = Cx + Du \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = sX(s) - x_0 \quad ; \mathcal{L}(u) = U(s) \quad ; \mathcal{L}(y) = Y(s) \rightarrow$$

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \rightarrow$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) + (sI - A)^{-1} x_0$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1} B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1} x_0$$

- če predpostavimo homogem sistem ($u=0$) dobimo odziv na začetne pogoje:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x_0$$

- če predpostavomo začetne pogoje enake nič pa dobomo odziv sistema izražen s prenosno funkcijo sistema $G(s)$:

$$Y(s) = \underbrace{(C(sI - A)^{-1} B + D)}_{G(s)} U(s) = G(s)U(s)$$

Omeniti velja, da poli prenosne funkcije niso nujno enaki lastnim vrednostim sistemske matrike A, oziroma da je stopnja prenosne funkcije lahko nižja od stopnje sistema. Omenjeno dejstvo je pogojeno z notranjo strukturo, ki pogojuje vhodno/izhodno zvezo med vhodi in izhodi sistema in na katero se nanaša prenosna funkcija.

Kako pa je s prenosnimi funkcijami transformoranih sistemov ? Pokazali smo, da velja:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \quad ; x_0 \\ y = Cx + Du \end{array}\right\} \xrightarrow{T} \left\{\begin{array}{l} \dot{z} = A_t z + B_t u \quad ; z_0 \\ y = C_t z + Du \end{array}\right.$$

$$A_t = TAT^{-1} \quad (A = T^{-1} A_t T)$$

$$B_t = TB \quad (B = T^{-1} B_t)$$

$$C_t = CT^{-1} \quad (C = C_t T)$$

$$D = D_t$$

Za prenosni funkciji originala in transformiranega sistema velja:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D =$$

$$C(T^{-1}T)(sI - A)^{-1}(T^{-1}T)B + D =$$

$$CT^{-1}(T(sI - A)^{-1}T^{-1})TB + D =$$

$$C_t^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1} B_t + D =$$

$$C_t^{-1}(sI - A_t)^{-1} B_t + D = G_t(s)$$

Torej velja : $G(s) = G_t(s)$

kar pomeni, da je vhodno-izhodni opis neodvisen (invarianten) glede na linearne transformacije, ki jih izvedemo nad originalom.

opomba: upoštevajte, da smo v gornji izpeljavi uporabili pravilo invertiranja matričnega produkta . Velja namreč:

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1} P^{-1}$$

kjer sta P in Q poljubni, nesingularni kvadratni matriki.

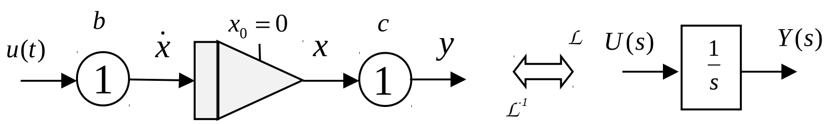
Modelne pretvorbe:

P1.) Poglejmo skalarni primer: $\left.\begin{array}{l} \dot{x} = u \quad ; x_0 = 0 \\ y = x \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}}$

Gornji sistem v prostoru stanj očitno opisuje integrator, ki v slikovnem prostoru zavzame obliko:

$$G(s) = (1(sI - 0)^{-1}1 = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}U(s)$$



P2.) syms s complex

```
syms s complex
A=[0 1 0;0 0 1;-1 -2 -3]
b=[0;0;1]
ct=[1 1 0]
d=0;
[st,ime]=ss2tf(A,b,ct,d) –Matlab ukaz
e=eye(3);
Gs=simple(ct*inv((s*e-A))*b);-pretvorba
pretty(Gs)
```

$$\rightarrow G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

Modelne pretvorbe:

P3.)

```
A=[-2 1;1 -5]
eig(A)
c=[1 1]
b=[2;1]
d=0
[st,im]=ss2tf(A,b,c,d);     -pretvorba v G(s)

[r,p,k]=residue(st,im);     -parcialni ul.

[zer,pol,k]=tf2zp(st,im);  -faktorizirana oblika
syms s complex
Gs=vpa((st(1)*s^2+st(2)*s+st(3))/
     (im(1)*s^2+im(2)*s+im(3)),4);
pretty(Gs)
Gs_zp=vpa((s-zer)/(s-pol(1))/(s-pol(2)),4);
pretty(Gs_zp)
Gs_pu=vpa(r(1)/(s-p(1))+r(2)/(s-p(2)),4);
pretty(Gs_pu)
E=eye(2);
gs=simple(c*inv(s*E-A)*b);
pretty(gs)
```

```
  3. s + 15.
 --------------
  2
s  + 7. s + 9.
```

```
         3. s + 15.
  -----------------------
(s + 5.303) (s + 1.697)
```

```
   .2519       2.748
  --------- + ---------
 s + 5.303   s + 1.697
```

```
       s + 5
  3 -----------
     2
    s  + 7 s + 9
```

ps_gs_parc_ul.m

C:\MATLAB6p5\work\dinamika\ps_gs_parc_ul