Splošna rešitev LDS

- Izračun prehajalne matrike, splošna rešitev LDS
- Odziv na začetne pogoje
- Standardni vzbujalni signali
- Odzivi LDS na standardne vzbujalne signale
- Pomoč→ Matlab

Splošna rešitev homogenega dela-skalarni primer

Enovhodne linearne dinamične sieteme v prostoru stanj zapišemo v standardni obliki:

$$\dot{x} = A x + bu \quad ; x_0$$

$$y = c^{\mathrm{T}} x$$

Za primer nevzbujanega skalarnega sistema dobimo najpreprostejšo možno obliko dinamičnega sistema prvega reda in poiščimo rešitev za poljubno začetno stanje:

$$\dot{x} = a\, x \quad ; x_0 \quad ; t > 0$$

Iščemo torej funkcijo, katere odvod je enak *ax(t)*. Očitno obstaje le ena takšna funkcija, namreč: $x = e^{at} \rightarrow \dot{x} = a\, x = a e^{at}$

Dalje sledi:

$$\dot{x} = a\, x \quad / e^{-at}$$

$$\underbrace{e^{-at}\dot{x} - a e^{-at} x}_{d/dt(e^{-at}x)} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}x) = 0 \quad / \int_0^t \quad \rightarrow$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{-at}x)\, d\tau = 0$$

$$e^{-at}x(t) - e^{-a0}x(0) = 0 \quad / e^{at}$$

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

$$x = e^{at}x_0$$

Ključno vlogo v naravi rešitve ima očitno parameter a z dimenzijo [1/s].

- a>0 ➔ $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$

Stajne x bo torej naraščalo preko vseh meja, sistem bo *nestabilen*.

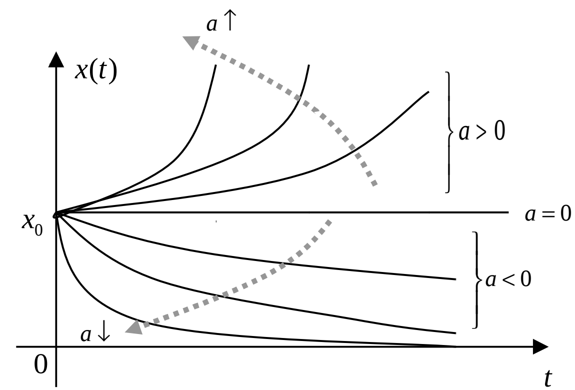
- a=0 ➔ $x(t) = e^{0t}\, x_0 = x_0$

Stanje x se s časom ne spreminja in ostaja enako začetnemu stanju. Vsaka še tako majhna perturbacija parametra a, povzroči spremembo narave odziva. Tovrstne sisteme bomo označevali kot mejno (*marginalno) stabilne*.

- a<0 ➔ $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

Samo v tem primeru se sistem iz poljubnih začetnih pogojev vrne v izhodišče. Takšni sistemi so *asimptotsko stabilni*.

Na hitrost spreminjanja stanja x vpliva iznos parametra a, recipročna vrednost $1/a$ je *časovna konstanta* T [s].



Splošna rešitev homogenega dela-sistem drugega reda

Sistemi drugega reda vključujejo dva neodvisna energijska akumulatorja med katerima prihaja do izmenjave energije. V splošnem primeru lahko takšni sistemi vključujejo tudi disipacijske (izgubne) elemente. V prostoru stanj jih lahko zapišemo v splošni obliki:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad ; x_0$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x + du$$

Karakteristični polinom:

$$P(s) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$

$$\lambda^2 + 2 \underbrace{\xi}_{dusenje} \omega_n \lambda + \underbrace{\omega_n}_{\substack{naravna \\ frekvenca}}{}^2$$

$$\omega_n = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\xi = -\frac{1}{2\omega_n}(a_{11} + a_{22}) =$$

$$: \quad -\frac{(a_{11} + a_{22})}{2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}$$

in pripadajoče lastne vrednosti

$$P(s) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega_n^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

*splošen postopek izpeljave rešitve bo predstavljen v nadaljevanju

Splošna rešitev homogenega dela-sistem drugega reda

Ključno vlogo v naravi rešitve ima očitno dušenje v sistemu. Več primerov je možnih, odvisno od iznosa in predznaka parametra ξ.

- $0 < \xi < 1 \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega$

Rešitev homogenega dela je v tem primeru * (a):

$$x(t) = e^{-\delta t}\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

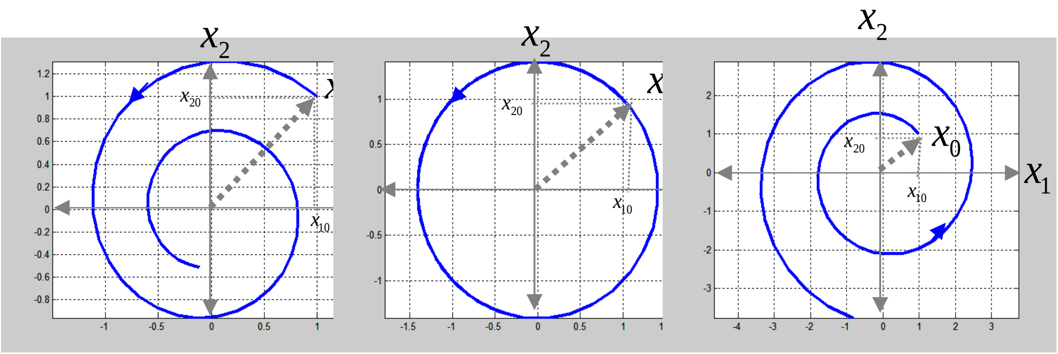
- $\xi = 0 \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm j\omega$

Rešitev v tem primeru predstavlja linearni nedušen oscilator s frekvenco ω in amplitudo $\|x_0\|$ (b)

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

- $0 > \xi \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \delta \pm j\omega$

V tem primeru se amplituda oscilacij stalno povečuje, kar pomeni nestabilno rešitev (c).



a.) b.) c.)

*splošen postopek izpeljave rešitve bo predstavljen v nadaljevanju

Splošna rešitev v prostoru stanj

V splošni obliki zapišemo linearni sistem v prostoru stanj:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; x_0$$

Za podane začetne pogoje in znano vzbujanje iščemo rešitev *x(t)* za *t>0*. Gornjo enačbo pomnožimo z leve z matričnim eksponentom e^{-At} (podobno kot smo spoznali za skalarni primer):

$$e^{-At}\dot{x} = e^{-At}Ax + e^{-At}Bu$$

Upoštevajmo da velja: $e^{-At}A = Ae^{-At}$

Dalje sledi: $\underbrace{e^{-At}\dot{x} - Ae^{-At}x}_{=\frac{d}{dt}(e^{-At}x)} = e^{-At}Bu$

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}Bu \ / \int_0^t$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}x)\,d\tau = \int_0^t e^{-A\tau}Bu\,d\tau$$

$$e^{-A\tau}x \,\Big|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau}Bu\,d\tau$$

$$e^{-A\tau}x(t) - e^{-A0}x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu\,d\tau \quad / \times e^{At}$$

$$\boxed{x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu\,d\tau}$$

Odziv linearnih sistemov je torej superpozicija delnih odzivov na začetne pogoje (homogena rešitev) in odziva na vzbujanje sistema (partikulatna rešitev). Če definiramo **prehajalno matriko** kot:

$$\boxed{\Phi(t) = e^{At}}$$

lahko zapišemo splošno rešitev tudi v naslednji obliki:

$$\boxed{x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu\,d\tau}$$

Ob upoštevanju izhodne enačbe:

$$y = Cx + Du$$

sledi dalje:

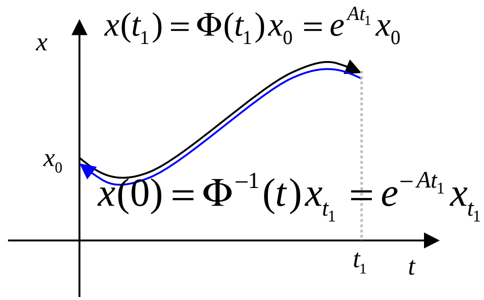
$$y(t) = C\,(\Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu\,d\tau\,) + Du$$

Ključno vlogo v naravi odziva linearnih sistemov ima torej prehajalna matrika. Od nje je odvisno ali se bo sistem odzval stabilno ali nestabilno, oscilatorno ali predušeno, hitro ali počasi. Odzive linearnih sistemov lahko za določene posebne oblike vzbujanj izračunamo v analitični obliki. Predvsem za sisteme višjega reda in/ali splošnih oblik vzbujanj pa odzive sistema računamo z numeričnimi integracijskimi metodami.

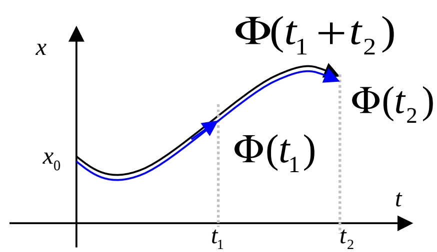
Lastnosti prehajalne matrike

- Razvoj v potenčno vrsto: $$\Phi(t)=e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k=I+tA+\frac{t^2A^2}{2!}+\frac{t^3A^3}{3!}+\dots$$
- Odvod/integral prehajalne matrike: $$\frac{d}{dt}\Phi(t)=\frac{d}{dt}e^{At}=A+tA^2+\frac{t^2}{2!}A^3+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\,t^{k-1}}{k!}A^k=$$
$$=\underline{\underline{Ae^{At}=e^{At}A}}\quad;\frac{d}{dt}\Phi(0)=Ae^{A0}=\underline{\underline{A}}$$
$$\int_0^t e^{A\tau}d\tau=\underline{\underline{A^{-1}(e^{At}-I)}}=\underline{\underline{(e^{At}-I)A^{-1}}}\quad;\det(A)\neq 0$$
- Očitno velja tudi: $\Phi(0)=e^{A0}=I$
- Prehajalna matrika je nesingularna➔

$$\Phi(-t)=\Phi^{-1}(t)=(e^{At})^{-1}=e^{-At}$$



- Gibanje sistema na intervalu lahko razdelimo v sektorje, ker velja:
- $$\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)$$
$$=e^{At_1}e^{At_2}=e^{A(t_1+t_2)}$$



Lastnosti prehajalne matrike

Tehnika računanja splošne rešitve:

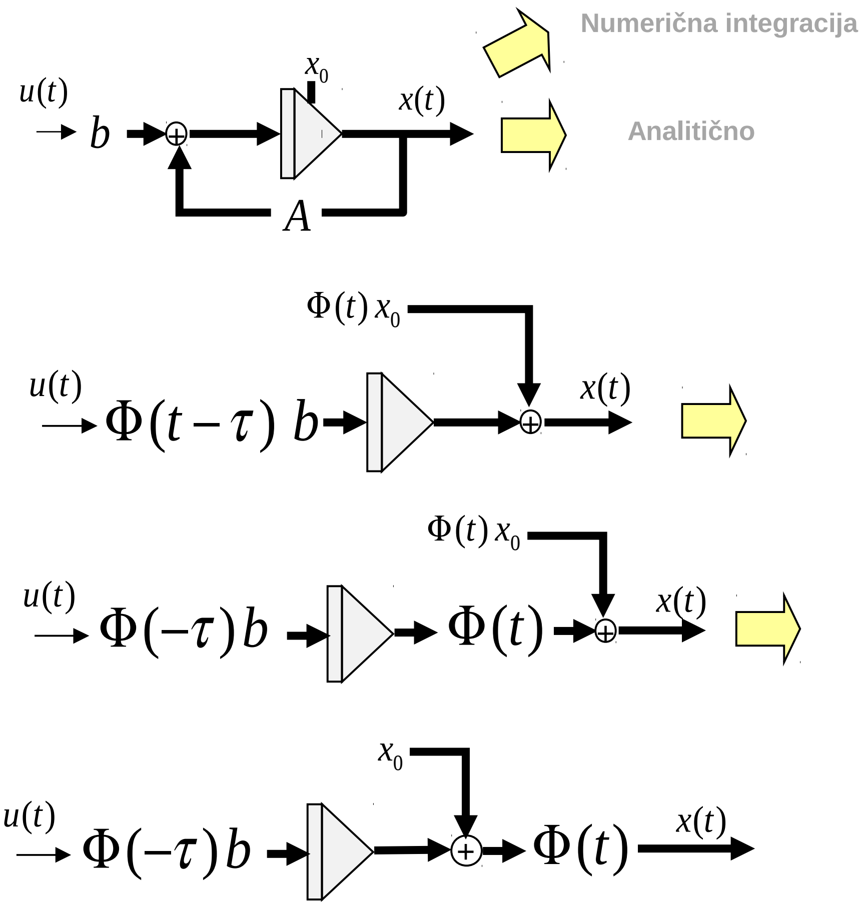
$$\dot{x} = Ax + bu \quad ; x_0, t \geq 0$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{rešitev na zacetne pogoje}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau}_{\text{konvolucijski integral} - \text{resitev na zunanje vzbujanje}}$$

$$= \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, b\, u(\tau)\, d\tau =$$

$$\Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi(-\tau)\, b\, u(\tau)\, d\tau =$$

$$\Phi(t)\left(x_0 + \int_0^t \Phi(-\tau)\, b\, u(\tau)\, d\tau \right)$$



Izračun prehajalne matrike

- Razvoj v potenčno vrsto:

$$e^{At} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(At)^{\nu}}{\nu!} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots$$

- Diagonalizacija sistemske matrike *A*. Predpostavimo enostavne lastne vrednosti. Potem velja:

$$VAV^{-1} = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i) \quad : i = 1, \ldots n$$

$$V^{-1}\Lambda V = A$$

$$e^{At} = e^{V^{-1}\Lambda V t} = I + V^{-1}\Lambda V t + \frac{1}{2!}(V^{-1}\Lambda V)^2 t^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(V^{-1}\Lambda V)^k t^k$$

$$(V^{-1}\Lambda V)^k = (V^{-1}\Lambda \underbrace{V)(V^{-1}}_{I}\Lambda \underbrace{V)(V^{-1}}_{I}\Lambda V) \; \ldots \underbrace{.(V^{-1}}_{I}\Lambda V) = V^{-1}\Lambda^k V$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(V^{-1}\Lambda V)^k t^k = V^{-1}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Lambda^k t^k\right)}_{e^{\Lambda t}} V$$

$$e^{At} = V^{-1} e^{\Lambda t} V = V^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V$$

Izračun prehajalne matrike

- Za odziv sistema na začetne pogoje smo v slikovnem oziroma časovnem prostoru izpeljali:

$$\underbrace{X(s) = (sI - A)^{-1}x_0}_{\text{slikovni prostor}} \quad ; \quad \underbrace{x(t) = e^{At}x_0}_{\text{casovni prostor}} \Rightarrow$$

$$e^{At} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow}} \left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

Zgled 1:

C:\MATLAB6p5\work\\dinamika\eAt_analit

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix} \;;\; x_0=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\, u(t)=0\,;\, t\geq 0$$

a.) razvoj v TV :

Matlab: eAt1=simple(E+A*t+A^2*t^2/2+A^3*t^3/(3*2)+A^4*t^4/(1*2*3*4))

eAt =

[1-4*t+13/2*t^2-20/3*t^3+121/24*t^4, 3*t-6*t^2+13/2*t^3-5*t^4]
[-t+2*t^2-13/6*t^3+5/3*t^4, 1-3/2*t^2+2*t^3-13/8*t^4]

eAt*x0=

[3*t-6*t^2+13/2*t^3-5*t^4]
[1-3/2*t^2+2*t^3-13/8*t^4]

Zgled 1

b.) Diagonalizacija :

Matlab: [lv,lam]=eig(A)

eAt2=simple(lv*expm(lam*t)*inv(lv))

```
lv =
  -0.9487   -0.7071
  -0.3162   -0.7071
lam =
    -3     0
     0    -1
 eAt =
 [  3/2/exp(t)^3-1/2/exp(t), -3/2/exp(t)^3+3/2/exp(t)]
 [  1/2/exp(t)^3-1/2/exp(t), -1/2/exp(t)^3+3/2/exp(t)]
```

Resitev x(t):

```
[ -3/2/exp(t)^3+3/2/exp(t)]
[ -1/2/exp(t)^3+3/2/exp(t)]
```

Zgled 1

c.) Laplaceova transformacija :

Matlab: lp=simple(inv(s*E-A))

lp=1/(sE-A) =

[s/(s^2+4*s+3),   3/(s^2+4*s+3)]

[-1/(s^2+4*s+3), (s+4)/(s^2+4*s+3)]   ➔   Parcialni ulomki, inverzni Laplace   ➔

[3/2/exp(t)^3-1/2/exp(t), -3/2/exp(t)^3+3/2/exp(t)]

[1/2/exp(t)^3-1/2/exp(t), -1/2/exp(t)^3+3/2/exp(t)]

<u>Resitev x(t):</u>

[-3/2/exp(t)^3+3/2/exp(t)]

[-1/2/exp(t)^3+3/2/exp(t)]

Zgled 1

d.) odziv na začetne pogoje :

Matlab:

```
A=[-4 3;-1 0]
    b=[1;0]
    ct=[1 1]
    d=0;
    %--------------
    x0=[0;1]
```

Začetni pogoji

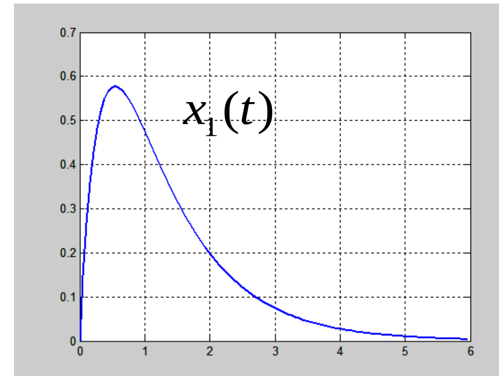
```
    %--------------
    sys=ss(A,b,ct,d)
```

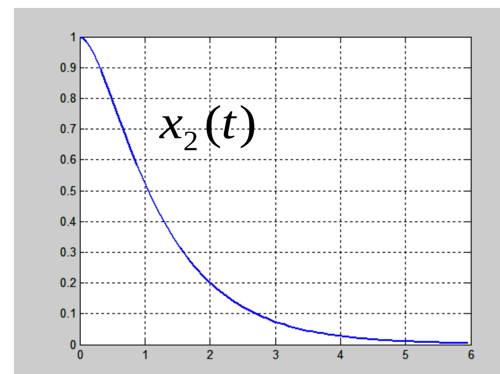
Definiranje sistema

```
    %--------------
    [yy,tt,xx]=initial(sys,x0);
```

Izračun odziva

```
    plot(tt,xx(:,1))
    figure(2)
    plot(tt,xx(:,2))
```





Test.m

\C:\Program Files\MATLAB\R2009b\work\reg_demo\test1.m

Zgled 1.a

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}\quad ; b=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}; u(t)=1 ; t\geq 0$$

Rešiti moramo konvolucijski integral:

$$e^{A(t-\tau)}b=\begin{bmatrix}1.5e^{-3(t-\tau)}-0.5e^{-(t-\tau)}\\ 0.5e^{-3(t-\tau)}-1.5e^{-(t-\tau)}\end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{At}b1d\tau=\begin{bmatrix}1.5e^{-3t}\boxed{\int_0^t e^{3\tau}d\tau}-0.5e^{-t}\boxed{\int_0^t e^{\tau}d\tau}\\ 0.5e^{-3t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau-1.5e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau\end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{3\tau}d\tau=\frac{1}{3}e^{3\tau}\Big|_0^t=\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}$$

$$\int_0^t e^{\tau}d\tau=e^{\tau}\Big|_0^t=e^{t}-1$$

$$1.5e^{-3t}\left(\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}\right)-0.5e^{-t}(e^{t}-1)=\underline{\underline{-0.5e^{-3t}+0.5e^{-t}}}$$

➔Rešitev:

$$\int_0^t e^{At}b1d\tau=\begin{bmatrix}-0.5e^{-3t}+0.5e^{-t}\\ -\frac{1}{3}-\frac{0.5}{3}e^{-3t}+0.5e^{-t}\end{bmatrix}$$

Zgled 1.a

Z uporabo Mataba dobimo rešitev rešitev :

```
 pp=simple(lv*expm(lam*(t-tau))*inv(lv))
 pom=pp*b
 res=simple(int(pom,tau,0,t));
pom =

[ 3/2*exp(-3*t+3*tau)-1/2*exp(-t+tau)]
[ 1/2*exp(-3*t+3*tau)-1/2*exp(-t+tau)]


res =

[     -1/2/exp(t)^3+1/2/exp(t)]
[ -1/3-1/6/exp(t)^3+1/2/exp(t)]
```

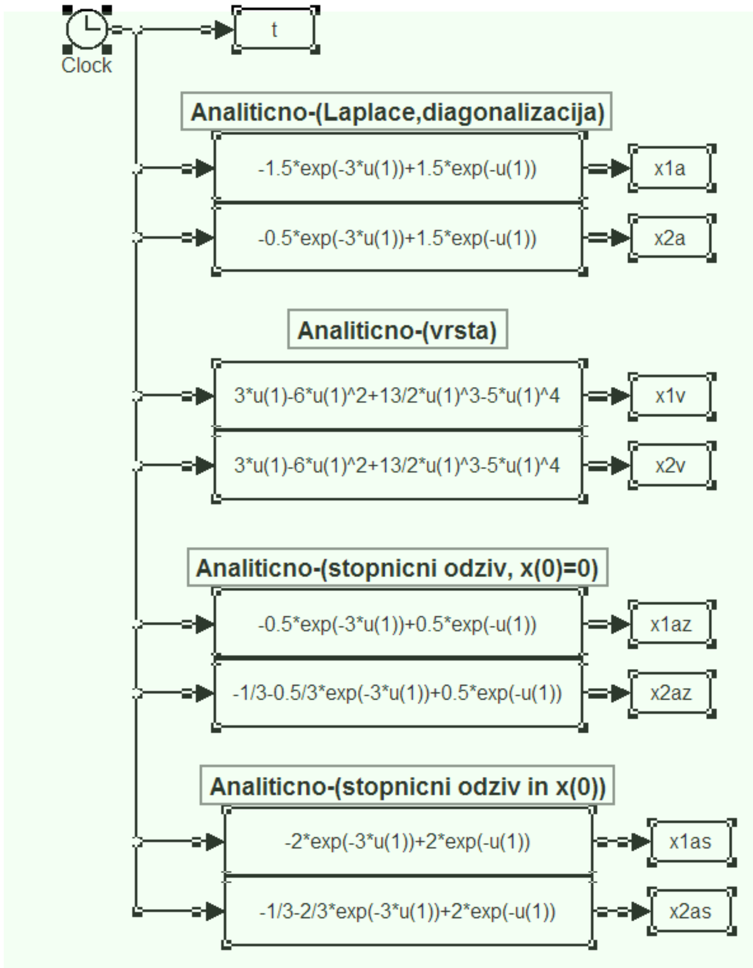
Zgled 1.a -P1

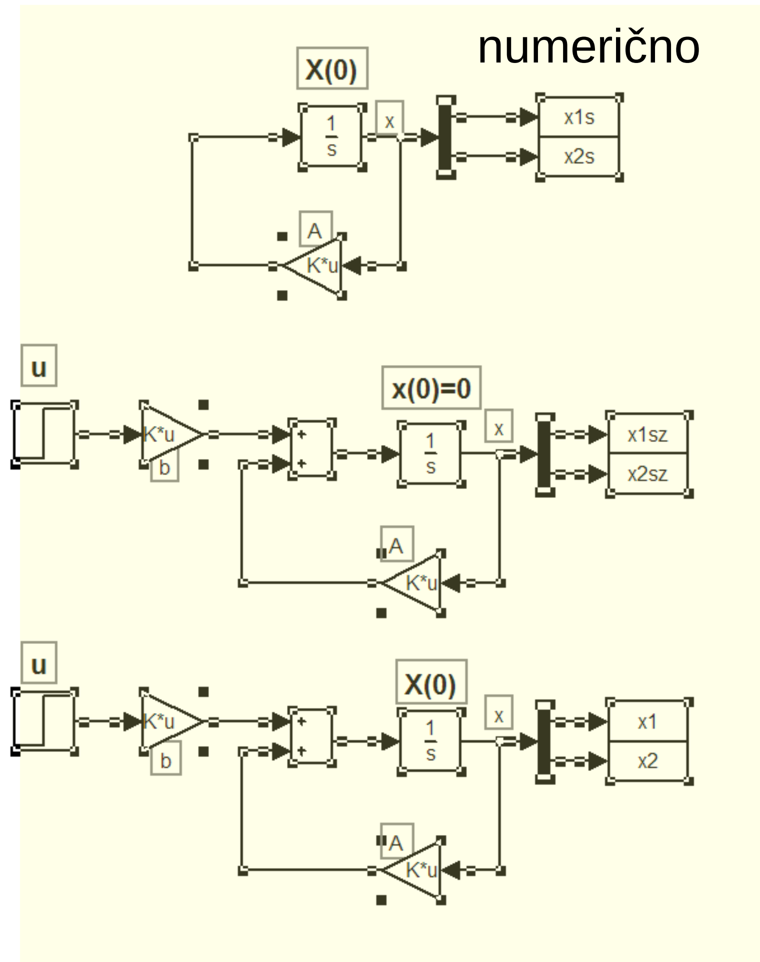
Skupno rešitev dobimo torej kot vsoto (superpozicijo) odzivov na začetne pogoje in stopnično vzbujanje:

$$x(t) = e^{At}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \int_0^t e^{At}\, b1\, d\tau = \begin{bmatrix}-1.5e^{-3t} + 1.5e^{-t}\\ -0.5e^{-3t} + 1.5e^{-t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-0.5e^{-3t} + 0.5e^{-t}\\ -\frac{1}{3} - \frac{0.5}{3}e^{-3t} + 0.5e^{-t}\end{bmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix}-2e^{-3t} + 2e^{-t}\\ -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t} + 2e^{-t}\end{bmatrix}}}$$

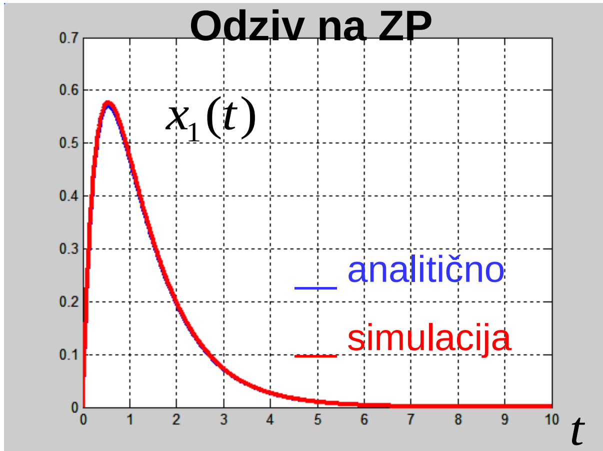
Primerjava numeričnega in analitičnega izračuna

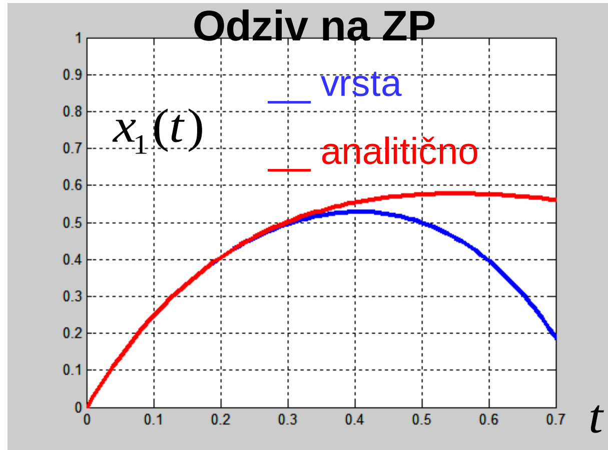


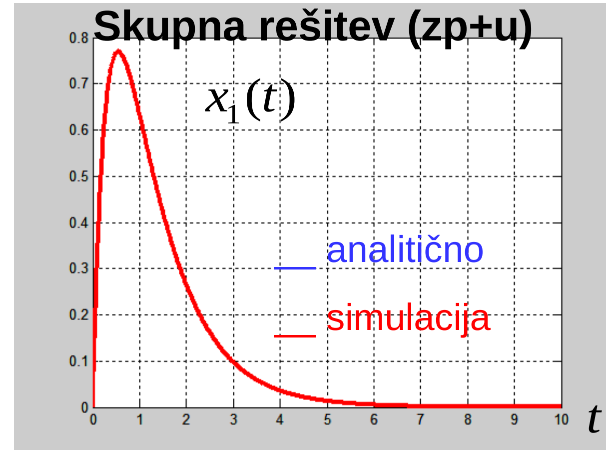


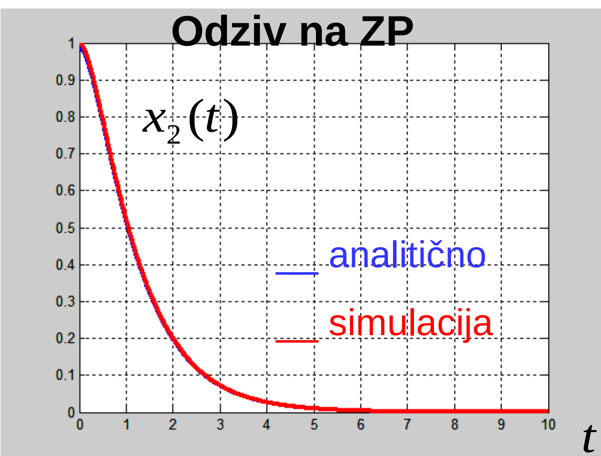
analitično

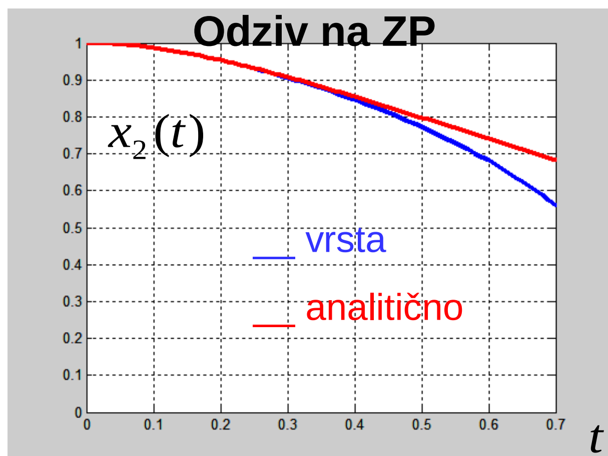
Rešitev sistema, numerično-analitično

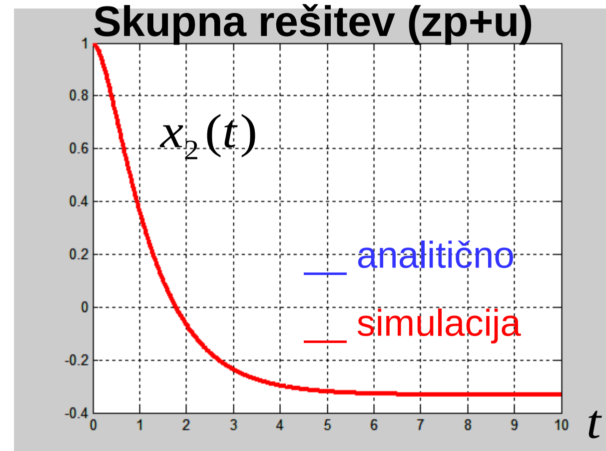












Še en postopek

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \quad ; x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; t \geq 0$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$$

Za prehajalno matriko lahko predpostavimo obliko:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-4t} & k_3 e^{-2t} + k_4 e^{-4t} \\ k_5 e^{-2t} + k_6 e^{-4t} & k_7 e^{-2t} + k_8 e^{-4t} \end{bmatrix} \quad ; k_i = ?$$

Ker velja:

$$\Phi(0) = I \quad in \quad \dot{\Phi}(0) = A \quad \rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} k_1 + k_2 = 1 & -2k_1 - 4k_2 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 & -2k_3 - 4k_4 = 1 \\ k_5 + k_6 = 0 & -2k_5 - 4k_6 = -8 \\ k_7 + k_8 = 1 & -2k_7 - 4k_8 = -6 \end{matrix}\right\} \rightarrow k_1 \ldots . k_8$$

Zgled 2

$$\dot{x} = ax + bu = -2x + 3u \quad ; x_0 = 1 ; u(t) = 1; \quad x(t) = ? \quad ; t \geq 0$$

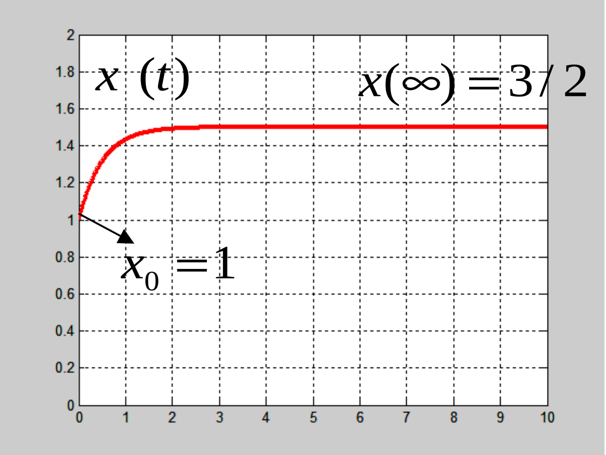
Očitno je : $\Phi(t) = e^{-2t} \rightarrow x_{zp}(t) = e^{-2t} x_0 = e^{-2t} 1 = e^{-2t}$

$$e^{a(t-\tau)} b = e^{-2(t-\tau)} 3 = 3e^{-2(t-\tau)}$$

$$\int_0^t e^{a(t-\tau)} b 1 d\tau = 3e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau$$

$$\int_0^t e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2}$$

$$x_u(t) = 3e^{-2t} \left(\frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-2t}}}$$



In skupna rešitev : $x(t) = x_{zp}(t) + x_u(t) = e^{-2t} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-2t}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(3 - e^{-2t})}}$

Ravotežno stanje : $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \frac{3}{2}$

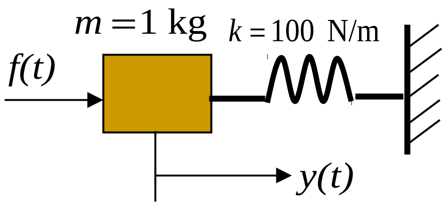
Primer konjugirano kompleksnih lastnih vrednosti

$$\lambda_{i,i+1} = \delta \pm j\omega \quad \rightarrow e^{\Lambda t} = e^{(\delta \pm j\omega)t} = e^{\delta t} e^{\pm j\omega t}$$

Spomnimo se：$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

Mehanski oscilator (ekvivalent LC nihajnemu vezju):



$$m\ddot{y} = f - ky \rightarrow$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f \rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j10 \quad ; V = \begin{bmatrix} -j0.1 & j0.1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

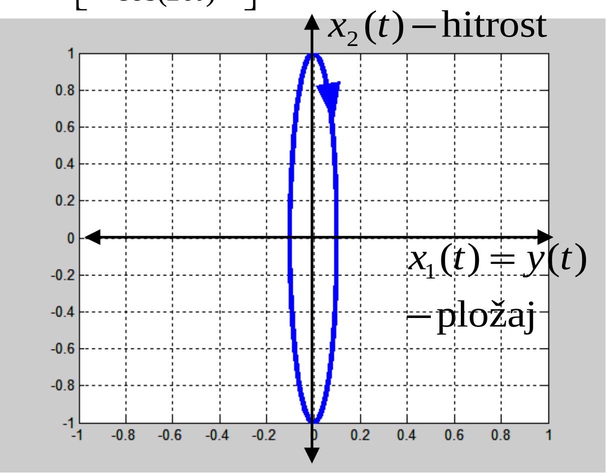
$$\Phi(t) = e^{At} = Ve^{\Lambda t}V^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(10t) & 1/10\sin(10t) \\ -10\sin(10t) & \cos(10t) \end{bmatrix}$$

Za primer ZP：

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$x(t) = \Phi(t)x_0 = \begin{bmatrix} \cos(10t) & 1/10\sin(10t) \\ -10\sin(10t) & \cos(10t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/10\sin(10t) \\ \cos(10t) \end{bmatrix}$$

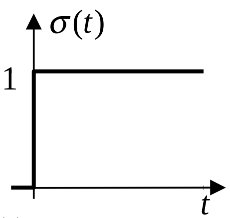


Standardni vzbujalni signali

Standardne vzbujalne signale uporabljamo v teoretski in eksperimentalni analizi dinamičnih sistemov. Najpomebnejši so: enotina stpnica, enotin impulz, Dirac-ova delta in rampa. Omenjene funkcije so med seboj povežemo z odvajanjem ali integriranjem. Za čase $t<0$ se te funkcije enake 0.

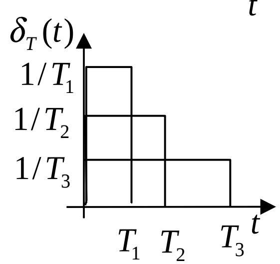
- enotina stopnica;

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



- enotin impulz;

$$\delta_T(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1/T & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$



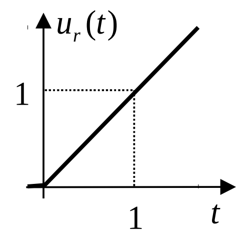
Površina enotinega impulza je 1. Če interval T limitira proti 0, preide enotin impulz v Dirac-ovo delta funkcijo:

$$\delta(t) = \lim_{t \to 0} \delta_T(t)$$

za katero velja: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$

- Enotina rampa; predstavlja linarno naraščajočo funkcijo z naklonom 1.

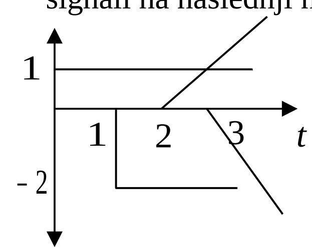
$$u_r(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$

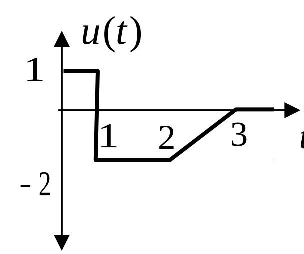


- Za omenjene funkcije torej velja:

$$\delta(t) \;{}_{d/dt}\!\Leftrightarrow^{\int}\; \delta(t)_{d/dt} \Leftrightarrow^{\int}\; u_r(t)$$

- Sestavljene funkcije lahko izrazimo s standardnimi signali na naslednji način:





$$u(t) = \sigma(t) - 2\sigma(t-1) + u_r(t-2) - u_r(t-3)$$

Harmonični in eksponentni vzbujalni signali

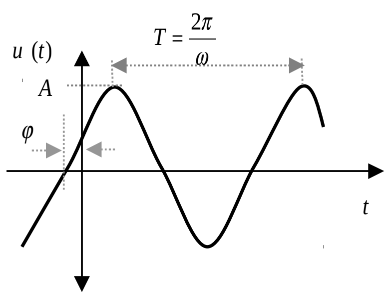
Razred harmoničnih in eksponetnih signalov ima velik pomen v analizi ustaljenih stanj in frekvenčnih karakteristik linearnih sistemov, ki so vzbujani z:

- harmoničnimi signali ene frekvence (npr. 50 Hz)

$$u(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad ;\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T_0$$

- ali v primeru periodičnih signalov, ki jih lahko izrazimo kot linearno kombinacijo harmoničnih signalov katerih frekvenca je mnogokratnik osnovne (bazne) frekvence (Fourier-jeva vrsta).

$$u(t) = \sum_{n=0}^{N} A_i \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$



Razred eksponetnih signalov je pomeben ker predstavlja naravni odziv linernih sistemov, poleg tega pa lahko tudi harmonične funkcije izrazimo v eksponentni obliki. V splošnem bomo predpostavili obliko:

$$u(t) = e^{st}$$

kjer je lahko eksponet s realen ali kompleksen. V primeru da je s realen, bo funkcija naraščala za $s>0$, oziroma upadala za $s<0$. Če je s imaginaren:

$$s = \pm j\omega \rightarrow \quad e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) \pm j\sin(\omega t)$$

Vsako realno harmonsko funkcijo lahko izrazimo kot vsoto kompleksnih eksponentnih funkcij:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad ;\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(e^{j\omega t})$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad ;\sin(\omega t) = \mathrm{Im}(e^{j\omega t})$$

V splošnem primeru ko je s kompleksen pa velja:

$$s = \delta + j\omega \rightarrow \quad e^{(\delta + j\omega)t} = e^{\delta t}(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))$$

Še nekatere pomembne zveze:

$$e^{(s_1+s_2)t} = e^{s_1 t}e^{s_2 t}; \qquad e^{nst} = (e^{st})^n; \qquad \frac{d}{dt}e^{st} = se^{st}$$

$$\int_0^t e^{s\tau}d\tau = \frac{1}{s}(e^{st} - 1) \qquad \lim_{t\to 0} e^{st} = 1$$

Odziv sistema na impulz, stopnico in rampo;

a.) **<u>Impulzni odziv:</u>**

$$\int_{0-\Delta}^{0+\Delta} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$$

$$u(t) = k\delta(t)$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bk\delta(\tau)d\tau =$$

$$e^{At}x_0 + e^{At}\underbrace{\int_0^t e^{-A\tau}bk\delta(\tau)d\tau}_{=e^{A0}bk} =$$

$$\underline{\underline{e^{At}(x_0 + bk)}}$$

$$y(t) = \underline{\underline{c^T e^{At}(x_0 + bk) + dk\delta(t)}}$$

Impulzni odziv-zgled

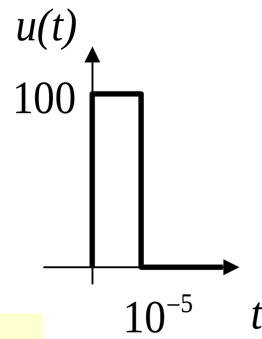
$$u(t) = 100 \times 10^{-5} = 10^{-3}\,\mathrm{Vs} \rightarrow$$

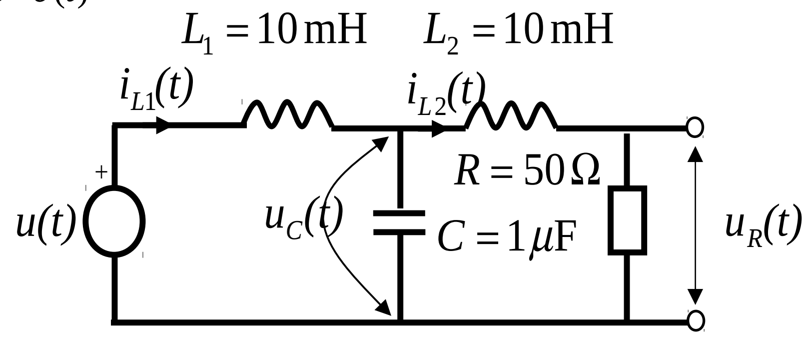
$$u(t) = 10^{-3}\delta(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} i_{L1} & i_{L2} & u_c \end{bmatrix}^{\mathrm{T}};\ x(0)=0;\quad \rightarrow$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \end{bmatrix} x = R\, i_{L2} = u_R$$






```
A =
         0         0      -100
         0     -5000       100
   1000000  -1000000         0

b =
  100
    0
    0
ct =
    0    50     0

lv =
  6.2432e-004 +7.1566e-003i  6.2432e-004 -7.1566e-003i -3.8689e-002

  1.8340e-003 -6.7097e-003i  1.8340e-003 +6.7097e-003i -4.1266e-002

  9.9995e-001              9.9995e-001              -9.9840e-001

lam =
 -1.2097e+003 +1.3867e+004i           0                      0
           0             -1.2097e+003 -1.3867e+004i          0
           0                       0              -2.5806e+003
```

$$y(t) = c^{\mathrm{T}} V e^{\Lambda t} V^{-1} b u =$$

<u>y(t) =</u>
<u>.26e5*exp(-.12e4*t)*sin(.14e5*t)</u>
<u>+.26e6*exp(-.26e4*t)</u>
-.26e6*exp(-.12e4*t)*cos(.14e5*t)+

b.) **Stopnični odziv:**

$$u(t) = k\sigma(t) \qquad ;\sigma(t) = 1, \forall t > 0$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bkd\tau =$$

$$e^{At}x_0 + e^{At}A^{-1}(I - e^{-At})bk =$$

$$\underline{\underline{e^{At}x_0 + A^{-1}(e^{At} - I)bk}}$$

(ker velja $Ae^{At} = e^{At}A$)

$$y(t) = \underline{\underline{c^T e^{At}x_0 + c^T A^{-1}(e^{At} - I)bk + dk\sigma(t)}}$$

Ravnotežno stanje :

če za sistemsko matriko A velja:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0\,; \quad i = 1,\ldots,n;$$

$$\det(A) \neq 0 \;\rightarrow$$

$$x_r = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

$$= \lim_{t\to\infty}(e^{At}x_0 + A^{-1}(e^{At} - I)bk)$$

$$= \underline{\underline{-A^{-1}bk}}$$

$$(\text{ker velja } \lim_{t\to\infty}(e^{At}) = 0)$$

$$y_r = \underline{\underline{-c^T A^{-1}bk + dk}}$$

Enak rezultat dobimo direktno iz sistemskega zapisa:

$$\dot{x} = Ax + bk\sigma(t)\,; \quad \dot{x} = 0 \rightarrow$$

$$0 = Ax_r + bk \quad \rightarrow$$

$$x_r = \underline{\underline{-A^{-1}bk}}$$

Stopnični odziv -zgled

Za vezje smo izpeljali (stran 22):

$$x = \begin{bmatrix} i_{L1} & i_{L2} & u_C \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} ; x(0) = 0; \quad \rightarrow$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -100 \\ 0 & -5e+3 & 100 \\ 1e+6 & -1e+6 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} x = R\, i_{L2} = u_R$$

Za predpostavljeno vzbujanje:

$$u(t) = 100\, \sigma(t) \quad [\mathrm{V}]$$

Lastne vektorje in lastne vrednosti prevedemo v realno obliko z vpeljavo transformacije *T*:

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/20 & 0 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\Lambda' = T^{-1} \Lambda T = \begin{bmatrix} \text{-}1.2097\mathrm{e}+3 & 1.3867\mathrm{e}+4 & 0 \\ \text{-}1.3867\mathrm{e}+4 & \text{-}1.2097\mathrm{e}+3 & 0 \\ 0 & 0 & \text{-}2.5806\mathrm{e}+3 \end{bmatrix}$$

$$V' = VT = \begin{bmatrix} 6.2432\mathrm{e}\text{-}4 & 7.1566\mathrm{e}\text{-}3 & \text{-}3.8689\mathrm{e}\text{-}2 \\ 1.8340\mathrm{e}\text{-}3 & \text{-}6.7097\mathrm{e}\text{-}3 & \text{-}4.1266\mathrm{e}\text{-}2 \\ 9.9995\mathrm{e}\text{-}1 & 0 & \text{-}9.9840\mathrm{e}\text{-}1 \end{bmatrix}$$

dobimo analitično rešitev v obliki :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{At}} = V' \, \mathrm{e}^{\Lambda' t} \, (\mathrm{V}')^{-1}$$

$$x(t) = e^{At}\, \mathrm{x}_0 + \mathrm{A}^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{A\,t}} - \mathrm{I})\, \mathrm{b\, k} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{-}.12*\exp(\text{-}.12\mathrm{e}4*\mathrm{t})*\cos(.14\mathrm{e}5*\mathrm{t}) + .37*\exp(\text{-}.12\mathrm{e}4*\mathrm{t})*\sin(.14\mathrm{e}5*\mathrm{t}) - 1.9*\exp(\text{-}.26\mathrm{e}4*\mathrm{t}) + 2. \\ 2. - .36*\exp(\text{-}.12\mathrm{e}4*\mathrm{t})*\sin(.14\mathrm{e}5*\mathrm{t}) - 2.*\exp(\text{-}.26\mathrm{e}4*\mathrm{t}) \\ \text{-}52.*\exp(\text{-}.12\mathrm{e}4*\mathrm{t})*\cos(.14\mathrm{e}5*\mathrm{t}) - 13.*\exp(\text{-}.12\mathrm{e}4*\mathrm{t})*\sin(.14\mathrm{e}5*\mathrm{t}) - 48.*\exp(\text{-}.26\mathrm{e}4*\mathrm{t}) + .10\mathrm{e}3 \end{bmatrix}$$

Ravnotežno stanje :

$$x_r = \text{-}\mathrm{A}^{-1}\, \mathrm{b\, k} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 100 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

stopnicni.m

C:\MATLAB6p5\work\dinamika\stopnicni.m

Odziv na rampo

c.) Pri izpeljavi odziva izhajamo iz naslednje pomembne lastnosti linearnih, časovno-invaiantnih sistemov, za katere velja:

če je poznan odziv sistema za podano vzbujanje, potem dobimo odziv sistema na integral (odvod) tega vzbujanja preprosto z integriranjem (odvajanjem) prvotnega odziva.

Ker predstavlja rampa integral stopnice to pomeni, da lahko izračunamo odziv sistema z integracijo stopničnega odziva.

$$u(t) = k\,t = k\int_0^t \sigma(\tau)\,d\tau \quad \rightarrow$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t A^{-1}(e^{A\tau} - I)\,b\,k\,d\tau =$$

$$e^{At}x_0 + A^{-1}\int_0^t (e^{A\tau} - I)\,b\,k\,d\tau =$$

$$\underline{\underline{e^{At}x_0 + A^{-1}(A^{-1}(e^{At} - I) - It)bk}}$$

(ker velja $Ae^{At} = e^{At}A$)

$$y(t) = \underline{\underline{c^T e^{At}x_0 + c^T A^{-1}(A^{-1}(e^{At} - I) - It)bk}}$$

Odziv na rampo-zgled

Predpostavimo preprost primer člena 1. reda:

$$\tau\,\dot{x} + x = u \quad ; x_0 \rightarrow$$

$$\dot{x} = -1/\tau\; x + 1/\tau\; u = a\,x + b\,u$$

Za vzbujanje naj velja:

$$u(t) = k\,t$$

Odziv sistema izračunamo kot:

$$x(t) = e^{at}x_0 + a^{-1}(a^{-1}(e^{at}-1)-t)\,bk$$

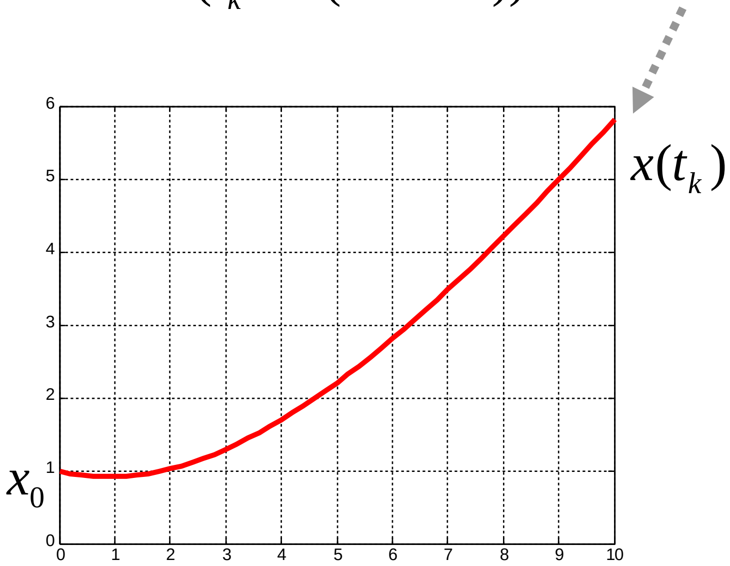
$$= e^{-t/\tau}x_0 + a^{-1}(a^{-1}(e^{at}-1)-t)\,bk$$

$$= e^{-t/\tau}x_0 + (t+\tau(e^{-t/\tau}-1))k$$

Naj bo:

$$k=1, \quad \tau = 5\,\text{s}; \quad x_0 = 1; \quad t_k = 10\,\text{s} \rightarrow$$

$$x(t_k) = e^{-t/5}1 + (t_k + 5(e^{-t/5}-1))1 = 5.812$$



Splošna rešitev harmonično vzbujanih stabilnih linearnih sistemov

V nadaljevanju bomo podali še splošno rešitev stabilnih harmonsko vzbujanih sistemov. Omenili smo že, da je v primeru harmonsko vzbujanih linearnih sistemov ustaljen izhod harmonska funkcija enake frekvence a različne amplitude in faze. V izpeljani splošni rešitvi izhajamo iz splošne oblike vzbujalnega signala:

$$u(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$$

in iz predpostavke :

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(A) < 0) \quad ; i = 1,..,n$$

Za splošno rešitev smo izpeljali:

$$x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b\, u\, d\tau = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} b\underline{U} e^{j\omega\tau}\, d\tau$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{(j\omega I - A)\tau} d\tau\, b\underline{U}$$

Ker smo predpostavili stabilen sistem ima matrika $(j\omega I - A)$ same pozitivne lastne vrednosti, kar pomeni da je nesingularna. Dalje sledi:

$$x = e^{At}x_0 + e^{At}(j\omega I - A)^{-1} e^{(j\omega I - A)\tau}\Big|_0^t b\underline{U}$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}(j\omega I - A)^{-1}(e^{(j\omega I - A)t} - I)b\underline{U}$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}(e^{(j\omega I - A)t} - I)(j\omega I - A)^{-1}b\underline{U}$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}(e^{j\omega t}e^{-At} - I)(j\omega I - A)^{-1}b\underline{U}$$

$$= e^{At}x_0 + (e^{j\omega t} - e^{At})(j\omega I - A)^{-1}b\underline{U}$$

$$= e^{At}(x_0 - (j\omega I - A)^{-1}b\underline{U}) + (j\omega I - A)^{-1}b\underline{U}e^{j\omega t}$$

Splošna rešitev harmonično vzbujanih stabilnih linearnih sistemov

Za izhod sistema potem velja (predpostavimo d=0):

$$y = \underbrace{c^{\mathrm{T}}\left(e^{At}\left(x_0 - (j\omega I - A)^{-1} b\,\underline{U}\right)\right)}_{\text{prehodna r.}} + \underbrace{c^{\mathrm{T}}(j\omega I - A)^{-1} b\,\underline{U} e^{j\omega t}}_{\text{ustaljena r.}}$$

V ustaljenem stanju, ko vpliv prvega sumanda pade na vrednost 0, dobimo ustaljeno rešitev:

$$y_s = \underbrace{c^{\mathrm{T}}(j\omega I - A)^{-1} b}_{G(j\omega)}\,\underline{U} e^{j\omega t}$$

Če je vzbujalni signal realen ga lahko podamo v splošni obliki:

$$u(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

V tem primeru je ustaljen izhod sistema podan z izrazom:

$$y_s = A\left|G(j\omega)\right|\sin(\omega t + \theta + \varphi(j\omega)) \qquad \begin{cases} \left|G(j\omega)\right| = \left(\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{G(j\omega)\}^2\right)^{1/2} \\ \varphi(j\omega) = \tan^{-1}\left(\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} / \mathrm{Re}\{G(j\omega)\}\right) \end{cases}$$

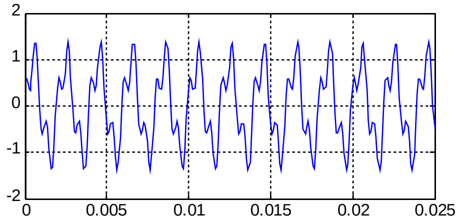
Splošna rešitev harmonično vzbujanih stabilnih linearnih sistemov-zgled

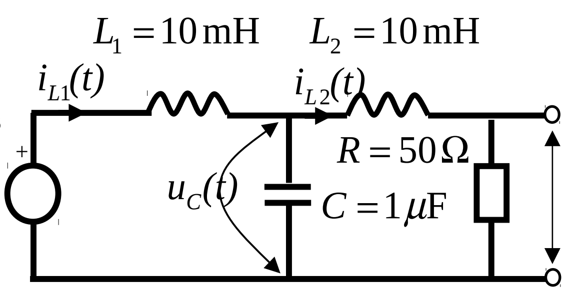
reg_demo\e2_harm_odz

Za obravnavan primer vezja predpostavimo harmonično vzbujanje

$$u^{1} = 1*\sin(2\pi*500+0)$$

$$u^{3} = 0.5*\sin(2\pi*3*500+\pi/2)$$

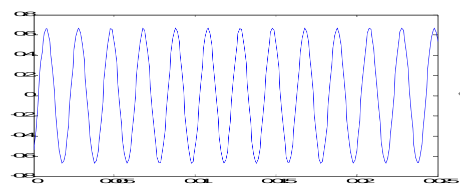




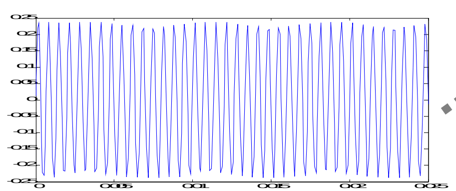
Vhod u(t)

Izhod y(t)

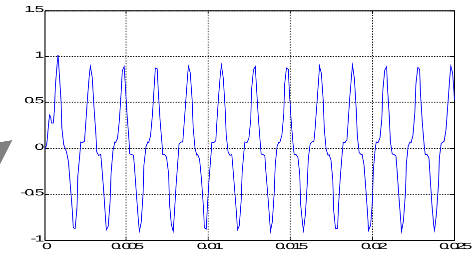
Analitična rešitev za 1H



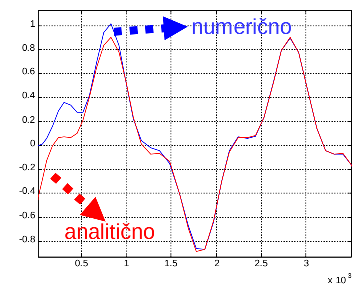
Analitična rešitev za 3H



\+ =



Analitična rešitev velja za ustaljeno stane !!



Harmonsko vzbujani linearni sistemi in načelo superpozicije:

Harmonske spremenljivke s konstantnimi parametri (frekvenco, amplitudo in fazo) lahko predstavimo v obliki (kompleksnih) fazorjev:

$$X, \omega, \varphi_x \overset{!}{=} konst.$$

$$x(t) = \underbrace{X\cos(\omega t + \varphi_x)}_{trenutna\ vrednost} \overset{Def}{\Rightarrow}$$

$$\underbrace{\underline{X} = X e^{j\varphi_x}}_{fazor} = X\cos(\varphi_x) + j\,X\sin(\varphi_x) = X\angle\varphi_x = X_{\mathrm{Re}} + j\,X_{\mathrm{Im}}$$

$$\Leftarrow$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{X} e^{j\omega t}\right\} = X\cos(\omega t + \varphi_x) = X\cos(\varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X_{\mathrm{Im}}}{X_{\mathrm{Re}}}\right) \overset{Def}{\Rightarrow} \underbrace{f}_{(\text{"trenutna"})\ frekvenca} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Ob upoštevanju načela superpozicije velja:

<u>ustaljen</u> izhod linearnega sistema, ki je vzbujano s sestavljenim harmonskim nihanjem (M-harmonikov), je <u>superpozicija</u> teh harmonskih nihanj, z različnimi amplitudami in fazami. Ustaljena stanja takšnih sistemov lahko tako obravnavamo s fazorji kot algebrajski problem.

VZBUJANJE

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{M} \underline{X}\, e^{jn\omega t}\right\}$$

→

LINEARNO VEZJE-
(Lin. dif. enačba n-te st.
Sistem dif. en. I.st)

→

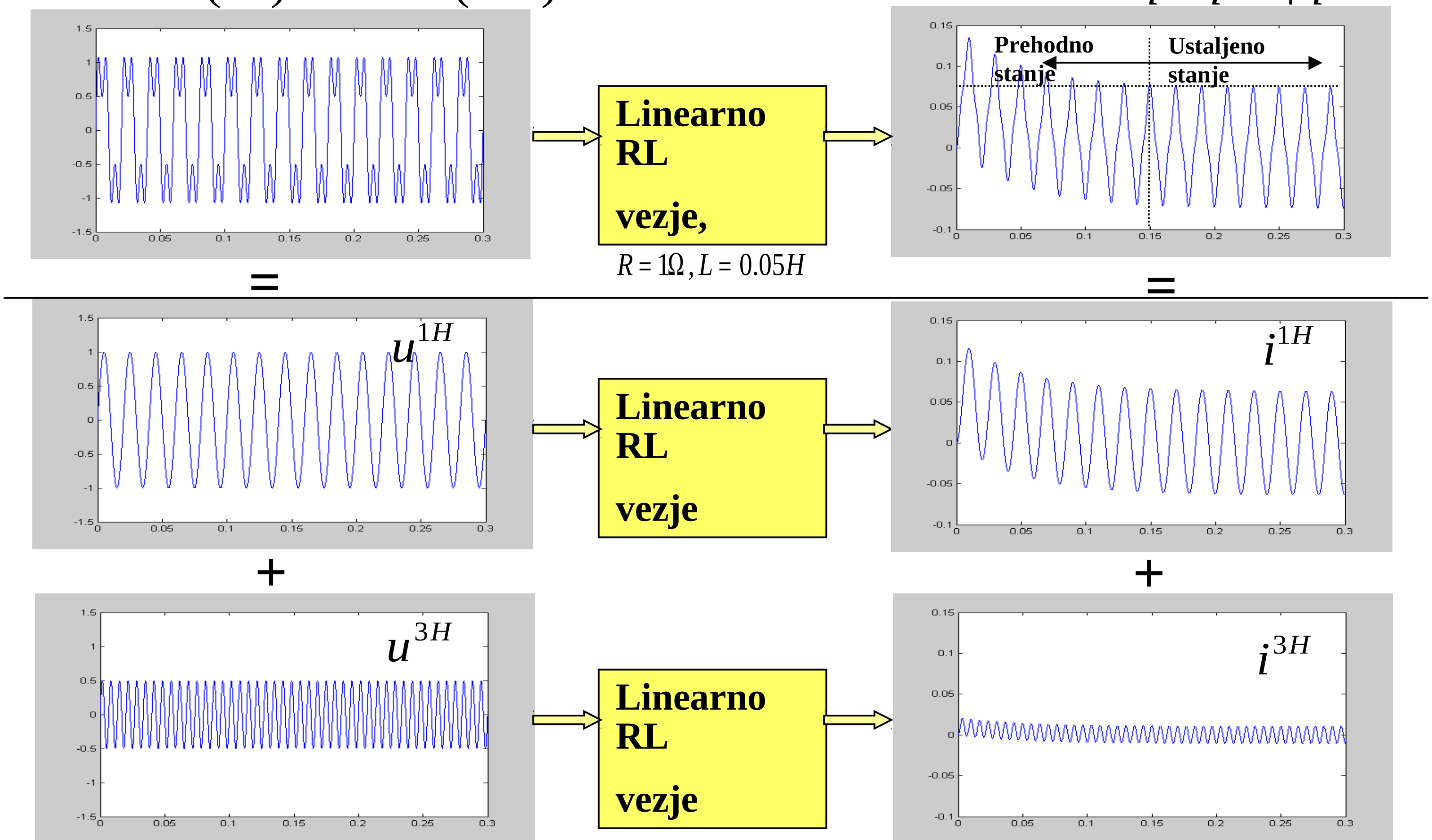
IZHOD

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{M} \underline{Y}\, e^{jn\omega t}\right\}$$

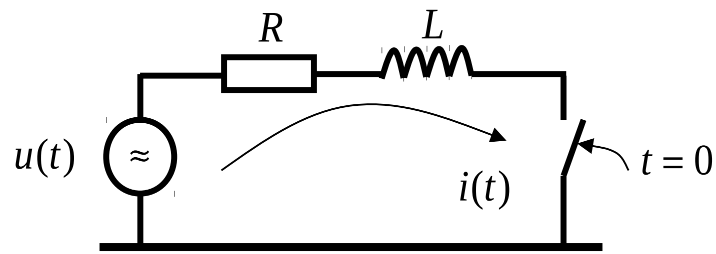
Harmonsko vzbujani linearni sistemi in načelo superpozicije:

$$u = 1\sin(\omega t) + 0.5\sin(3\omega t)$$

$$i = i^{1H} + i^{3H}$$



Harmonsko vzbujani linearni sistemi in načelo superpozicije:



Časovni prostor :

$$\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i+\frac{1}{L}U\sin(\omega t+\varphi)$$

$$=\underbrace{ai+bu}_{NDE};\quad i(0)=0,\ a=-\frac{1}{T},\ b=\frac{1}{L}$$

$$i=e^{at}\,i(0)+\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau=.....$$

$$=\underbrace{I\sin(\omega t+\theta)}_{\text{ustaljeno stanje}}-\underbrace{I\sin(\theta)e^{-\frac{t}{T}}}_{\text{prehodno stanje}}$$

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\ ;\theta=\varphi-\gamma\quad ;\gamma=\tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})$$

Fazorska rešitev:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=U\cos(\omega t+\alpha)$$

$$\mathbf{Re}\left\{L\frac{d}{dt}\underline{I}e^{j\omega t}+R\underline{I}e^{j\omega t}=\underline{U}e^{j\omega t}\right\}\Rightarrow$$

$$j\omega L\,\underline{I}e^{j\omega t}+R\underline{I}e^{j\omega t}=\underline{U}e^{j\omega t}\Rightarrow$$

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{R+j\omega L}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\angle\alpha-\gamma$$

Velja ob predpostavki:

$$\underline{I}=\text{konst.}\Rightarrow\frac{d}{dt}\underline{I}=0$$

Harmonsko vzbujani linearni sistemi in načelo superpozicije:

Kako pridemo do ustaljene fazorske rešitve, če predpostavimo sestavljeno harmonsko vzbujanje in linearno vezje ? Zaradi superpozicije je skupna rešitv sestavljena iz k-tih delnih rešitev:

$$\underline{I} = \sum_k \underline{I}_k = \sum_k \underline{U}_k / \underline{Z}_k =$$

$$\sum_k \underline{U}_k /(R + jk\omega L)$$

Za obravnavan zgled torej dobimo:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{U}_1 = 1 + j0\,V\,; \underline{U}_3 = 0.5 + j0\,V \\ &R = 1\Omega \quad ; L = 0{,}05\,H \\ &\underline{Z}_1 = 1 + j\omega L = 1 + j15{,}708\,\Omega \\ &\underline{Z}_3 = 1 + j3\omega L = 1 + j47{,}124\,\Omega \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\underline{I}_1 = 0{,}004 - j0{,}0634\,A \quad (|\underline{I}_1| = 0{,}0635\,A)$$

$$\underline{I}_3 = 0{,}0002 - j0{,}0106\,A\,(|\underline{I}_3| = 0{,}0106\,A)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 =$$

$$0{,}0042 - j0{,}074\,A \;\;(|\underline{I}| = 0.0741\,A)$$