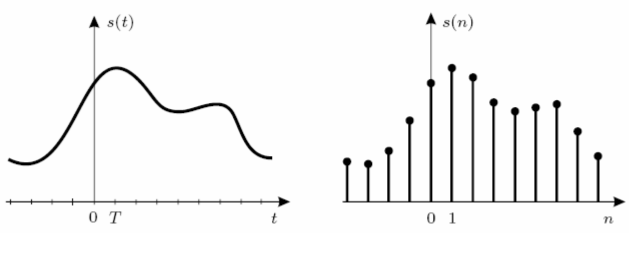
# SIGNALI

Deterministični signali v časovno nespremenljivih sistemih

# Časovno zvezni in časovno diskretni signali

- Časovno zvezni signal je signal *s*(*t*), katerega neodvisna spremenljivka *t* lahko zavzame katerokoli realno vrednost.
- Časovno diskretni signal s[n] je signal, pri katerem neodvisna spremenljivka *n* zavzame eno od vrednosti naravnih števil



# Realni in kompleksni signali

- Realni signali imajo zalogo vrednosti v množici realnih števil npr. $s(t) \in R$
- Kompleksni signali imajo zalogo vrednosti v množici kompleksnih števil npr. $s(t) \in C$.
- Kompleksni signali nastopajo npr. v komunikacijah, kjer informacijo sestavlja amplituda in faza signala.



# Deterministični in naključni signali

- Deterministični signali so signali, pri katerih je v kateremkoli trenutku $t$ vrednost $s(t)$ podana kot realno ali kompleksno število.
- Naključni signali so tisti signali, pri katerih je v kateremkoli trenutku $t$ vrednost $s(t)$ naključna in je podana z gostotno verjetnostno funkcijo.

# Periodični in neperiodični signali

- Signal *s*(*t*) je periodičen, če velja za določeno število *T*

$$s(t) = s(t + kT) \; \forall \; T$$

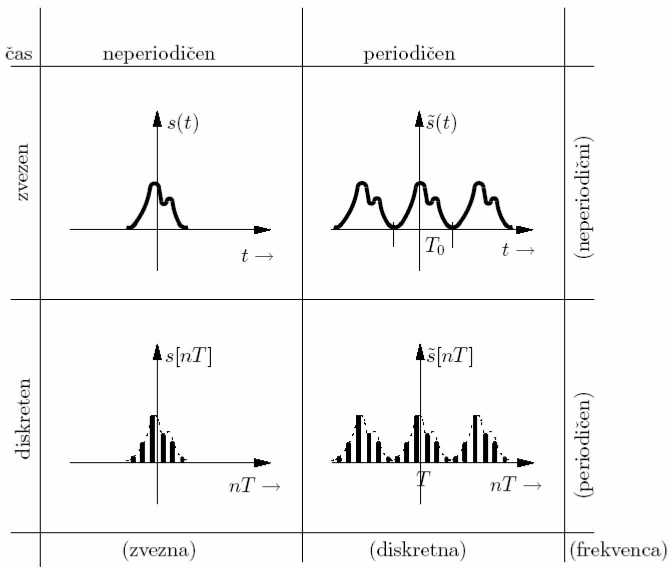
- Perioda signala je najmanjše celo število *T*, ki zadosti navedeni enačbi.
- Za časovno diskretne signale velja

$$s[n + kN_0] = s[n] \; \forall \; N_0$$

- Vsi ostali signali so aperiodični.



# Različice signalov



# Deterministični in elementarni signali

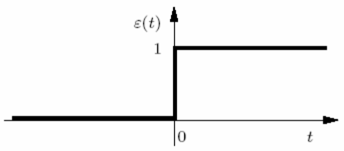
- Signal je najpogosteje naključno oblikovan. Naključni signali so sestavljeni iz osnovnih signalov, ji jih imenujemo deterministični signali.
- Če je opis determinističnega signala preprost pravimo, da je signal elementaren.
- Veliko elementarnih signalov lahko opišemo z navadnimi algebraičnimi izrazi.
- Za lažje opisovanje elementarnih signalov so kompleksnejšim signalom priredili posebne simbole in oznake.



# Elementarni signali

- sinusni signal $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \Theta)$
- kompleksni eksponentni signal $s(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \Theta)}$
- stopnična (Heavisedova) funkcija $\varepsilon(t)$ tudi u(t)

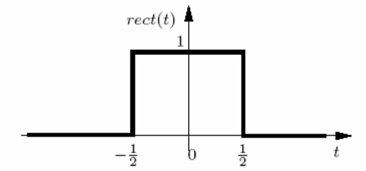
$$s(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \\ & \text{za} \\ 1 & \end{cases} \quad \begin{matrix} t < 0 \\ \\ t \geq 0 \end{matrix}$$



# Elementarni signali

- pravokotni signal rect (t)

$$s(t) = rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ & \text{za} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

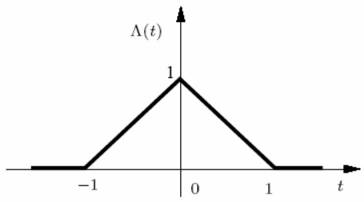





# Elementarni signali

- trikotni signal $\Lambda$(t)

$$s(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| \leq 1 \\ & \text{za} \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$



# Normiranje signalov

- V signalni in sistemski analizi navadno uporabljamo samo vrednosti veličin brez dimenzij – jih normiramo
  - časovne veličine normiramo na 1 s
  - amplitudne veličine na vrednost enote amplitude.
- Poenostavimo matematično obravnavo signalov, izgubimo pa pregled nad dimenzijo veličin.
- Vse elementarne signale pri koordinatnih transformacijah normiramo



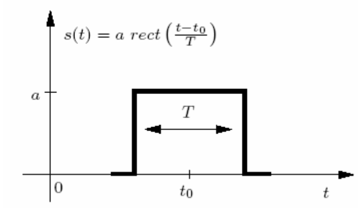
# Časovni premik in razteg

- Časovni premik v desno za $t_0$ izvedemo, če časovno konstanto $t$ zamenjamo s $t - t_0$.
  ($t_0 > 0$ zakasnitev signala)
- Časovni razteg za faktor *T izvedemo z zamenjavo č*asovne spremenljivke *t* s *t/T*.
  Če $|T|>1$ širši signal in za $|T|<1$ožji.
- Negativno predznačen T zrcali signal okrog ordinate - časovno zrcaljenje signalov.

# Časovni premik in razteg pravokotnega impulza

$$s(t) = rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } |t| \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{za } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

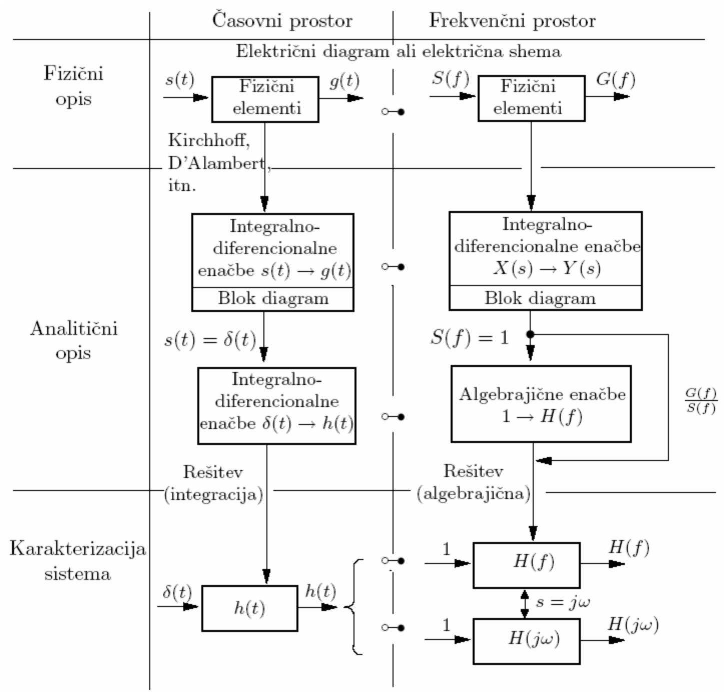
$$s(t) = a\,rect\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \begin{cases} a & \text{za } \left|\frac{t-t_0}{T}\right| \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{za } sicer \end{cases}$$






# Pojem sistema

- Komunikacijski prenosni sistem je na zapleten sestav
- Analiza lastnosti celotnega prenosnega sistema s pomočjo diferencialnih enačb ali z izračunom izmeničnih komponent.
- Matematično in časovno zahteven postopek
- Sistem razčlenimo v manjše (idealne) podsisteme, pri katerih je potrebno poznati samo spremembe na vhodih in izhodih

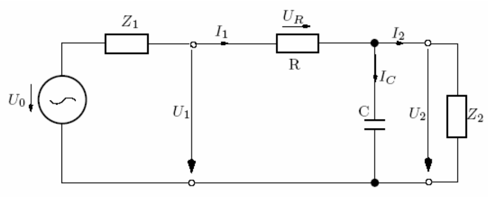


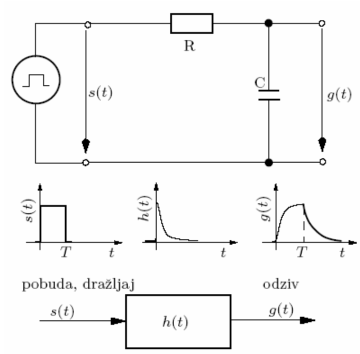



# Načini analize vezij v časovnem in frekvenčnem prostoru

- Način I:
  - Relacije med posameznimi veličinami (i,u), ki karakterizirajo dvopol, lahko razrešimo s pomočjo teorije vezij
  - Za vzbujanje najpogosteje uporabimo sinusne oblike signalov. Rešitev vodi preko kompleksnih kazalcev s katerimi rešujemo probleme prilagoditve, povratnih vplivov pri serijskih/paralelnih povezavah
- Način II:
  - Dvopol opišemo samo z njegovim izhodnim signalom *g*(*t*) v obliki odziva na določen vhodni signal *s*(*t*)

## Načini analize vezij v časovnem prostoru za RC vezje






## Linearni časovno nespremenljivi sistemi

- Zelo pomembni so linearni časovno nespremenljivi sistemi - Linear Time Invariant Systems (sistemi LTI)
- Sisteme LTI opišemo s transformacijsko enačbo:

$$g(t) = \mathrm{Tr}\left\{s(t)\right\}$$

- Z LTI opisujemo tehnične sisteme
- Sistemsko teoretična analiza z LTI ustreznejša in preprostejša za obravnavo idealiziranih sistemov

# Linearni sistemi

- Sistem je linearen, če za vsako linearno kombinacijo vhodnih signalov s(t):

$$s(t) = \sum_i s_i(t)$$

obstaja ustrezna linearna kombinacija izhodnih signalov g(t):

$$g(t) = \sum_i g_i(t)$$

Velja izrek superpozicije:

$$\mathrm{Tr}\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = \sum_i a_i \mathrm{Tr}\left\{s_i(t)\right\} = \sum_i a_i g_i(t)$$



# Časovno nespremenljivi sistemi

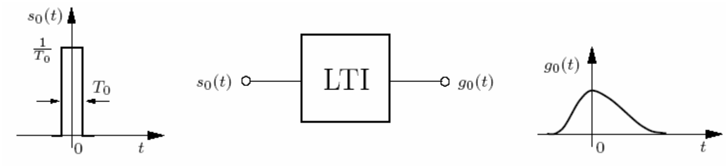
- Sistem je časovno nespremenljiv (invarianten), če velja za vsak časovni premik $\vartheta = t - t_0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left\{s(t-t_0)\right\} &= g(t-t_0) \\ \mathrm{Tr}\left\{s(\vartheta)\right\} &= g(\vartheta) \end{aligned}$$

- Če je sistem časovno invarianten je izhodni signal neodvisen od časovne premaknitve vhodnega signala.
- Časovno neodvisni so vsi sistemi, ki vsebujejo časovno neodvisne gradnike in nimajo časovno spremenljivih veličin (npr. RC četveropoli).

# Aproksimacija signalov z vsoto pravokotnih impulzov

- Odziv LTI sistema na pravokoten impulz $s_0(t)$ trajanja $T_0$ z amplitudo $1/T_0$ :




- Poljuben signal s (t) lahko obravnavamo kot vsoto časovno zamaknjenih pravokotnih impulzov:

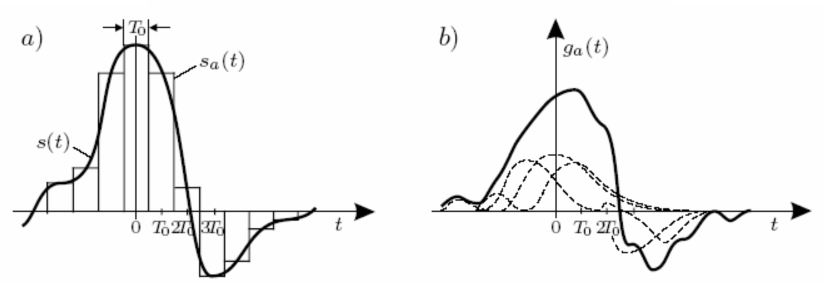
$$s(t) \approx s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0)s_0(t - nT_0)T_0$$



# Aproksimacija signalov z vsoto pravokotnih impulzov

- Z uporabo izreka o superpoziciji in časovni nespremenljivosti sistema je odziv sistema na vzbujanje $s_a(t)$:

$$g_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0)g_0(t - nT_0)T_0 \approx g(t)$$

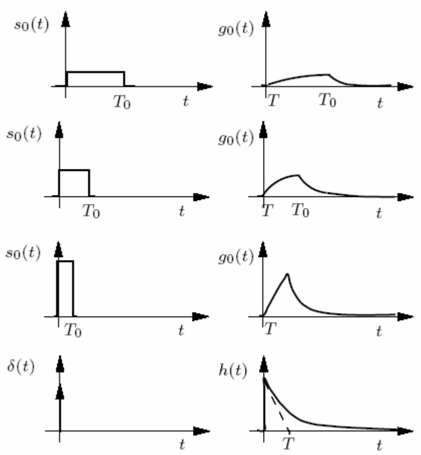


# Aproksimacija signalov z vsoto pravokotnih impulzov

- Krajši je čas trajanja impulzov $T_0$ ob konstantni površini (S=1), bolj se približuje izhodni signal obliki, ki je odvisna zgolj od prenosnih lastnosti sistema. Postaja neodvisen od trajanja vhodnih signalov.
- Mejni primer $T0 \rightarrow 0$ preoblikuje pravokotne impulze $s_a(t)$ v t.i. Diracove impulzne funkcije $\delta(t)$.
- Odziv sistema g(t) na vzbujanje z $\delta(t)$ predstavlja prenosno funkcijo sistema – t.i. impulzni odziv sistema $h(t)$.



# Mejni primer $T_0 \rightarrow 0$



# Konvolucijski integral

- Če v izrazih za $s_a(t)$ in $g_a(t)$ preoblikujemo pravokotne impulze v t.i. Diracove impulze s $T_0 \to 0$, potem funkciji preideta v konvolucijska integrala:

$$s_0(t) \to \delta(t) \qquad nT_0 \to \tau$$
$$g_0(t) \to h(t) \qquad T_0 \to d\tau$$

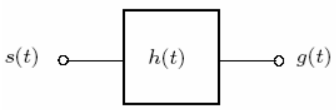
$$s(t) \approx s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0)s_0(t - nT_0)T_0 \quad \longrightarrow \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$g_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0)g_0(t - nT_0)T_0 \approx g(t) \quad \longrightarrow \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



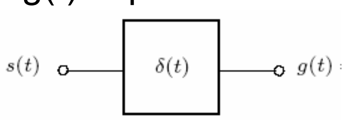
# Konvolucijska algebra

- Konvolucijski integral lahko zapišemo krajše s simbolom za linearni konvolucijski produkt:




$$g(t) = s(t) * h(t)$$

- Če je impulzni odziv vezja h(t) = $\delta(t)$ lahko odziv vezja g(t) zapišemo kot:




$$s(t) = s(t) * \delta(t)$$

# Konvolucijska algebra - pravila

- $\delta(t)$ predstavlja elementarni gradnik
- komutativnost $g(t) = s(t) * h(t) = h(t) * s(t)$

$\tau \rightarrow (t - x)$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau \rightarrow g(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} s(t-x)h(x)(-dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)s(t-x)dx$$

- asociativnost

$$f(t) * s(t) * h(t) = [f(t) * s(t)] * h(t) = f(t) * [s(t) * h(t)]$$

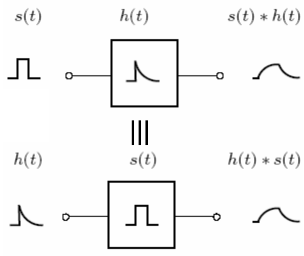
- distributivnost

$$f(t) * [s(t) + h(t)] = [f(t) * s(t)] + [f(t) * h(t)]$$

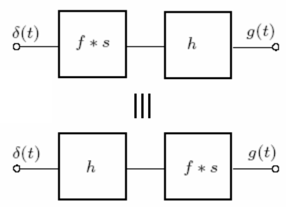


# Konvolucijska algebra - pravila

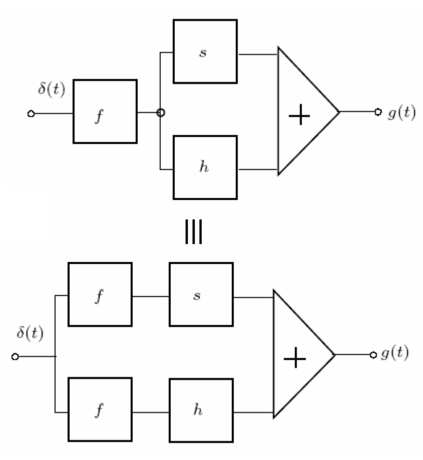
komutativnost




asociativnost

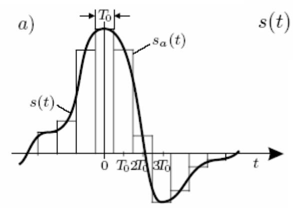



distributivnost



# Diracov impulz

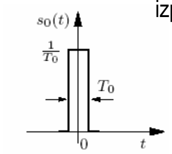
- Poljubni signal s(t) lahko zapišemo kot vsoto pravokotnih impulzov




$$s(t) \approx s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0)s_0(t-nT_0)T_0$$

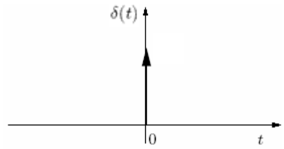
$$s_0(t) \to \delta(t) \quad nT_0 \to \tau \quad T_0 \to d\tau$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$ definicija δ(t)




izpeljava ne obstaja

$$\lim_{T_0 \to 0} \frac{1}{T_0} rect\left(\frac{t}{T_0}\right)$$






# Lastnosti Diracovega impulza

- Konvolucija poljubne funkcije *s*(*t*) z uteženim Diracovim impulzom*:*

$$[a\delta(t)] * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)a\delta(t-\tau)d\tau = a\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = as(t)$$

- Konvolucija vsote (linearne kombinacije) Diracovih impulzov s funkcijo *s*(*t*)

$$[a_1\delta(t) + a_2\delta(t)] * s(t) = (a_1 + a_2)s(t)$$

$$a_1\delta(t) + a_2\delta(t) = (a_1 + a_2)\delta(t)$$

# Lastnosti Diracovega impulza

- Filtrska lastnost Diracovega impulza

uporabimo komutativnosti konvolucije

$s(t) = s(t) * \delta(t) = \delta(t) * s(t)$ $\longrightarrow$ $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) s(t-\tau) d\tau$

- Interpretacija Diracovega impulza kot časovnega sita

$t=\tau_0 \rightarrow \delta(t-\tau)=0 \rightarrow s(\tau_0)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

izločimo vrednost funkcije $s(\tau)$ v trenutku $\tau=\tau_0$ , $\delta(t)$= obstaja samo ko t=0!

$t=0 \rightarrow \delta(0) \rightarrow s(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)s(-\tau)d\tau = s(0)$$

izločimo vrednost funkcije $s(\tau)$ v trenutku $\tau=0$



# Splošna filtrska lastnost Diracovega impulza

- Filtrsko lastnost Diracovega impulza lahko izpeljemo tudi iz konvolucije produkta $\delta(t)$ in s(t) s poljubnim signalom g(t):

$$[s(t)\delta(t)] * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)\delta(t)]g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)[s(\tau)g(t-\tau)]d\tau = s(0)g(t)$$

integral rešimo z uporabo filtrske lastnosti $\delta(t)$

<u>z uporabo g(t) = g(t) * $\delta$(t) preoblikujemo zgornji izraz v:</u>

$$s(0)g(t) = [s(0)\delta(t)] * g(t)$$

<u>in dobimo:</u>

$$s(t)\delta(t) = s(0)\delta(t)$$

<u>oz. zapišemo splošneje:</u>

$$\boxed{s(t)\delta(t-T) = s(T)\delta(t-T)}$$

# Diracov impulz z razširitvenim faktorjem

- Vpliv razširitvenega faktorja na Diracov impulz izpeljemo iz konvolucijskega produkta z s (t):

$$\delta(bt) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(b\tau)s(t-\tau)d\tau$$

s substitucijo $b\tau=x$ za $b > 0$ izpeljemo:

$$\delta(bt) * s(t) = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)s\left(t-\frac{x}{b}\right)dx$$

z upoštevanjem filtrske lastnosti dobimo:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)s(t-\tau)d\tau \quad \rightarrow \quad \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)s\left(t-\frac{x}{b}\right)dx = \frac{1}{b}s(t) \quad b > 0$$

$$= -\frac{1}{b}s(t) \quad b < 0$$



# Diracov impulz z razširitvenim faktorjem

- Splošen izraz vpliva razširitvenega faktorja

$$\boxed{\delta(bt) * s(t) = \frac{1}{|b|}s(t)}$$

izraz preoblikujemo v izraz za Diracov razširjeni impulz :

$$\frac{1}{|b|}s(t) = \left[\frac{1}{|b|}\delta(t)\right] * s(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\delta(bt) = \frac{1}{|b|}\delta(t)}$$

iz katerega izpeljemo lastnost simetričnosti Diracovega impulza :

$$\delta(bt) = \frac{1}{|b|}\delta(t) \xrightarrow{b=-1.} \delta(-t) = \delta(t)$$

# Časovni zamik Diracovega impulza

- Rezultat konvolucije signala s(t) s časovno zamaknjenim Diracovim impulzom predstavlja časovno zamaknjen signal.

$$\boxed{\delta(t-t_0) * s(t) = s(t-t_0)}$$

Če izhajamo iz izraza za filtrsko lastnost Diracovega impulza:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) s(t-\tau) d\tau$$

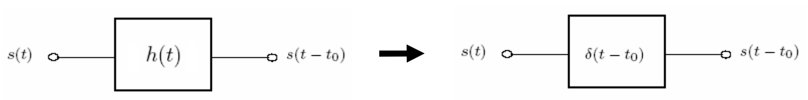
in zamenjamo izraz $\tau$-$t_0$=$\theta$ lahko izpeljemo:

$$\delta(t-t_0) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) \cdot s(t-\tau) d\tau \Big|_{\tau - t_0 = \theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta) \cdot s((t-t_0)-\theta) d\tau = s(t-t_0)$$



# Časovni zamik Diracovega impulza

- Prenosna funkcija sistema LTI z odzivom s(t-$t_0$)




- Idealni zakasnitveni časovni člen, s katerim poljubne vhodne signale s(t) zakasnimo za čas $t_0$

# Integriranje Diracovega impulza

- Na osnovi konvolucijskega produkta *stopnične funkcije in Diracovega impulza* izpeljemo izraz za integriranje in odvajanje:

$$\varepsilon(t) = \delta(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

ker:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \\ & \text{za} \\ 1 & \end{cases} \begin{matrix} t < 0 \\ \\ t \geq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 0 \\ 1, & \tau \leq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(t-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > t \\ 1, & \tau \leq t \end{cases}$$

sledi: $\boxed{\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau}$ če odvajamo po *t*: $\boxed{\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t)}$

<u>Z vpeljavo Diracovega impulza lahko odvajamo tudi funkcije s skokovitimi prehodi</u>

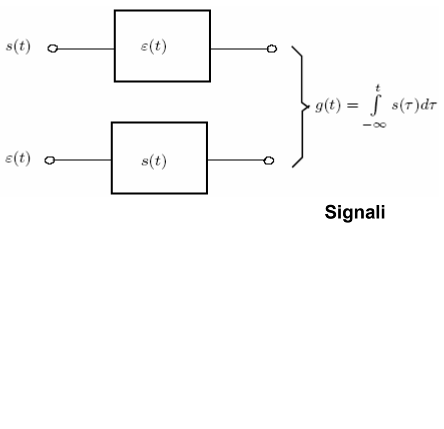


# Integriranje signalov

- Izraze za integracijo δ(t) lahko posplošimo na poljubne signale:

če v izrazu: $$\varepsilon(t) = \delta(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

zamenjamo δ(t) z s(t) : $$s(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau$$

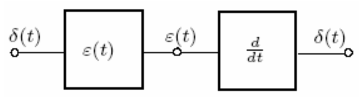



če je impulzni odziv nekega LTI sistema stopnična funkcija predstavlja sistem integrator

stopnični odziv vezja g(t), predstavlja integral impulznega odziva vezja s(t)

# Odvajanje signalov

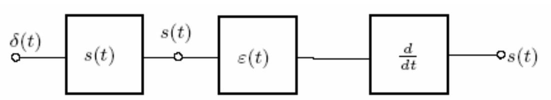
- Izhajajoč iz integratorju obratnih lastnosti lahko definiramo LTI sistem katerega stopnični odziv je Diracova funkcija



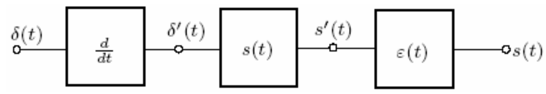

- Zaporedna vezava integratorja in diferenciatorja predstavlja idealen sistem brez popačitev



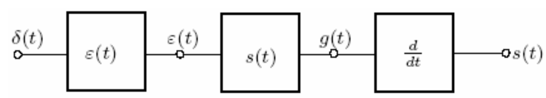
# Impulzni odziv diferenciatorja




$$\delta(t) * s(t) = s(t) \qquad s(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,dt$$




$$\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) \qquad \delta'(t) * s(t) = s'(t)$$




$$\varepsilon(t) = \delta(t) * \varepsilon(t) \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau$$

# Kavzalnost sistema

- Sistem je kavzalen (vzročen), če se izhodni signal ne pojavi pred vhodnim. Odziv sistema na vzbujanje se pojavi hkrati ali s časovno zakasnitvijo
- Kavzalni so vsi fizikalni sistemi, če ne vsebujejo lastnih generatorjev signalov. Za LTI sistem potem velja:

$$h(t) = 0 \quad \text{za} \quad t < 0$$



# Stabilnost sistema

- Sistem je stabilen (amplitudno), če na amplitudno omejen signal na vhodu dobimo amplitudno omejen odziv na izhodu (BIBO).

Za izhodni signal kavzalnega LTI sistema velja:

$$|g(t)| = |h(t) * s(t)| \leq \int_0^{\infty} |h(\tau)||s(t-\tau)| d\tau$$

če še predpostavimo |s(t)| = A:

$$|g(t)| \leq A \int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

stabilen odziv pa lahko pričakujemo le, če je izpolnjen pogoj:

$$\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Amplitudno stabilen kavzalen LTI sistem mora torej imeti absolutno integrabilen impulzni odziv!