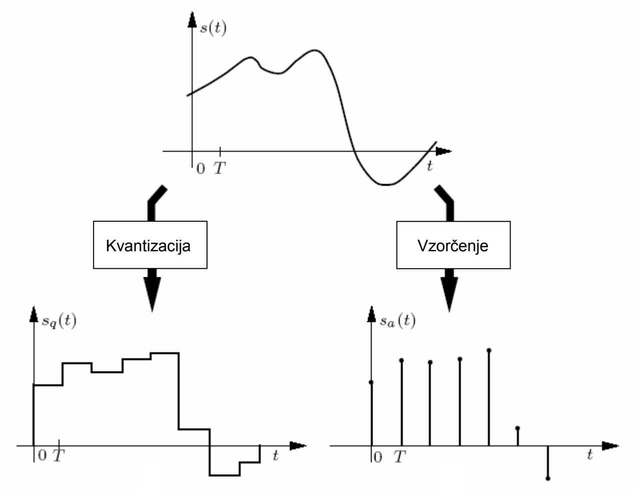
# SIGNALI

Diskretni signali in sistemi

# Diskretizacija signalov

- V telekomunikacijah in drugih tehniških področjih je najpogosteje v rabi numerično procesiranje signalov.
- Pri numeričnih metodah je signal podan v obliki končnega nabora števil ali kot del končnega zaporedja neskončne vrste števil.
- Signal je lahko v kartezičnem koordinatnem sistemu zvezen ali diskreten po vseh oseh predstavitve signala. Je lahko npr. amplitudno in časovno zvezen ali diskreten.

# Zvezni in diskretni signali

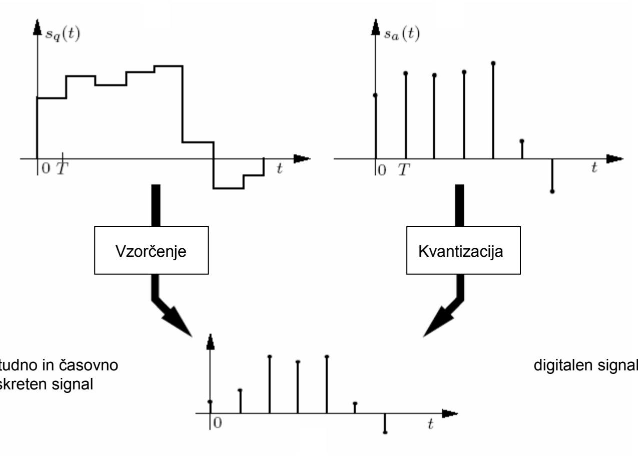



Amplitudno diskreten časovno zvezen signal

Amplitudno zvezen časovno diskreten signal



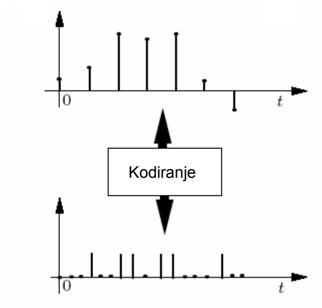
# Diskretizacija in kvantizacija




Amplitudno in časovno diskreten signal

digitalen signal

# Pretvorba v kodirano zaporedje

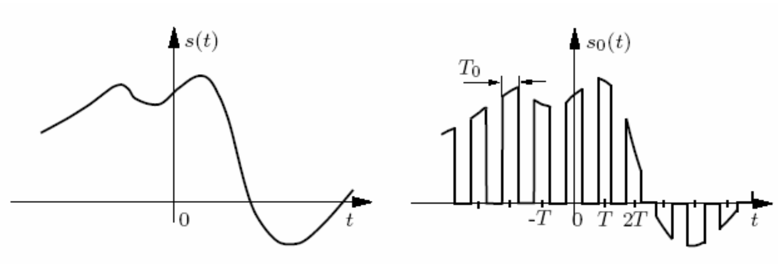



binaren časovno diskreten signal



# Vzorčenje v časovnem prostoru

Izhodiščni sistem vzorčenja bomo analizirali na primeru hipotetičnega gradnika vzorčenja (otipanja) v obliki vrat:




Sistem vzorčenja predstavlja mehanično ali elektronsko stikalo, ki v ekvidistantnih trenutkih časa, $nT$, ostane zaprto za določen infinitizimalen čas $T_0$. V časovnih presledkih $T$ se torej signal $s(t)$ prenese linearno na izhod sistema vzorčenja.

# Vzorčenje v časovnem prostoru

Na opisan način vzorčen signal lahko opišemo z naslednjim izrazom:

$$s_0(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t - nT}{T_0}\right)$$

Z porabo lastnosti časovnega zamika $\delta(t)$:

$$\delta(t - t_0) * s(t) = s(t - t_0)$$

lahko zgornji izraz preoblikujemo v obliko konvolucijskega produkta:

$$s_0(t) = s(t) \left[rect\left(\frac{t}{T_0}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right]$$

Časovno diskretno predstavitev signala dobimo, če zmanjšamo čas vzorčenja $T_0$ na neko mejno vrednost. V tem primeru so v vzorčenem signalu vsebovane zgolj funkcijske vrednosti $s(nT)$, v trenutkih $nT$.



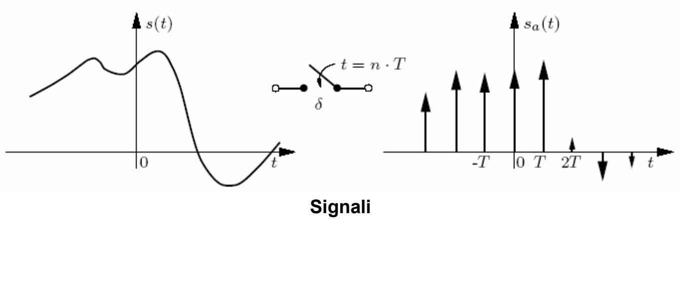
# Vzorčenje v časovnem prostoru

Idealen vzorčnik dobimo, če v konvolucijskem produktu vzorčni impulz $rect(t/T_0)$ zamenjamo z Diracovim impulzom. Tako dobimo idealno vzorčen signal $s_a(t)$:

$$s_a(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Upoštevajoč splošno filtrsko lastnost $\delta(t)$, lahko zgornji izraz preoblikujemo v:

$$s(t)\delta(t - T) = s(T)\delta(t - T) \rightarrow s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t - nT)$$



# Vzorčenje v časovnem prostoru

Idealen vzorčnik pretvori časovno zvezen signal *s*(*t*) v zaporedje ekvidistantnih δ(t) s periodo vzorčenja *T* ($f_s=1/T$). Posamični δ(t) so uteženi s funkcijskimi vrednostmi vzorcev *s*(*nT*).

Prehod med definicijo idealnega sistema vzorčenja v realni sistem lahko obravnavamo na dva načina:

Vzorčenje s stikalom, ki linearno prepušča signal

$$s_a(t)=s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t-nT}{T_0}\right)=s(t)\left[rect\left(\frac{t}{T_0}\right)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]$$

Vzorčenje s stikalom, ki vzorčeno vrednost zadrži

$$s_a(t)=\left[s(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]*rect\left(\frac{t}{T_0}\right)$$



# Diskretni signali in Fourierjeva transformacija

Podrobnejše lastnosti vzorčenih signalov lahko izpeljemo s pomočjo Fourierjeve transformacije. S pomočjo zaporedja δ(t), lahko izraz za idealno vzorčen signal $s_a(t)$ preoblikujemo:

$$s_a(t)=s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$\mathrm{III}\left(\frac{t}{T}\right)=|T|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$\longrightarrow \quad s_a(t) \;=\; s(t) \;\cdot\; \frac{1}{T}\mathrm{III}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Fourierjeva transformacija zgornjega zapisa za T>0 je:

$$\begin{array}{ccccc} s_a(t) & = & s(t) & \cdot & \frac{1}{T}\mathrm{III}\left(\frac{t}{T}\right) \\ \circ\!\!-\!\!\bullet & & \circ\!\!-\!\!\bullet & & \circ\!\!-\!\!\bullet \\ S_a(f) & = & S(f) & * & \mathrm{III}(Tf) \end{array}$$

# Diskretni signali in Fourierjeva transformacija

Z upoštevanjem lastnosti časovnega zamika $\delta(t)$:

$$\delta(t-t_0) * s(t) = s(t-t_0)$$

in zapisa vlaka $\delta(t)$ v obliki vrste:

$$\text{III}(Tf) = \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

lahko konvolucijski produkt Fourierjeve transformacije idealnega vzorčenega signala preoblikujemo:

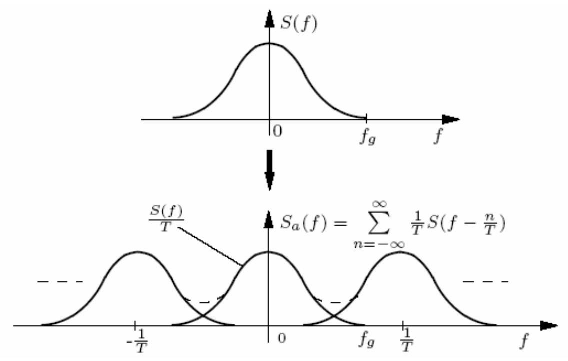
$$S(f) \quad * \quad \text{III}(Tf) \quad = \quad \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Transformiran vzorčen signal $S_a(f)$ predstavlja konvolucijski produkt spektra signala $S(f)$ z Diracovim impulznim zaporedjem v frekvenčnem prostoru. Spekter signala se ponavlja periodično, s periodo $1/T$ .



# Periodičnost spektra diskretnih signalov

Periodičnost spektra je nazorno razvidna iz primera pasovno omejenega signala:



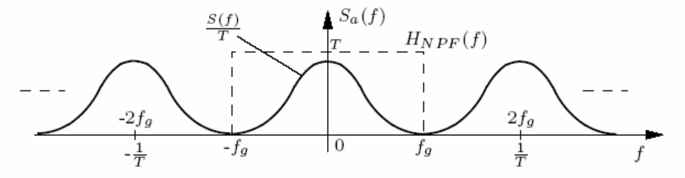

Spektri S(f) se prekrivajo, ker je mejna frekvenca signala $f_g > f_s$ ($f_s$=1/T):

# Periodičnost spektra diskretnih signalov

Če nizkopasovni signal z mejno frekvenco $f_g$ vzorčimo v takšnih razmikih $f_s$=1/T kjer je izpolnjeno:

$$T \leq \frac{1}{2f_g},$$

potem se periodično ponavljajoči spektri v $S_a(f)$ ne prekrivajo, zato lahko $S(f)$ s primernim nizkopasovnim fitrom izločimo iz $S_a(f)$ brez napak:




Nizkopasovni filter (sito) je sistem, katerega prenosna funkcija je samo v omejenem frekvenčnem intervalu |*f*| < $f_g$ različna od nič.



# Periodičnost spektra in idealni nizkopasovni filter

Za rekonstrukcijo potrebujemo nizkopasovni filter, ki mora imeti v področju |*f*| < $f_g$ konstantno in realno prenosno funkcijo. Zunaj tega področja ne sme prepuščati nobenih drugih spektralnih komponent funkcije $S_a(f)$. Idealni nizkopasovni filter ima prenosno funkcijo:

$$H_{NPF}(f) = T rect\left(\frac{f}{2f_g}\right) \qquad T \leq \frac{1}{2f_g},$$

Spekter S(f) iz periodičnega $S_a$(f) izločimo s produktom prenosne funkcije idealnega nizkopasovnega filtra. Za pretvorbo v časovni prostor uporabimo konvolucijski izrek in izrek o enakosti Fourierjeve transformacije.

$$rect(t/T) \circ\!\!-\!\!\bullet\; T si(\pi T f)$$

$$si\left(\pi \frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\; T rect(T f)$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} S(f) & = & S_a(f) & \cdot & T rect\left(\frac{f}{2f_g}\right) \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ | & & | & & | \\ \circ & & \circ & & \circ \\ s(t) & = & s_a(t) & * & [2f_g T si(2\pi f_g t)] \end{array}}$$

# Periodičnost spektra in idealni nizkopasovni filter

Če smo izbrali največjo dovoljeno (zaradi prekrivanja) periodo vzorčenja $T$=1/(2$f_g$), lahko za s(t) z upoštevanjem lastnosti časovnega zamika δ(t) izpeljemo naslednji izraz:

$$s(t) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT) \right] * si\left(\pi \frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) si\left(\pi \frac{t-nT}{T}\right)$$

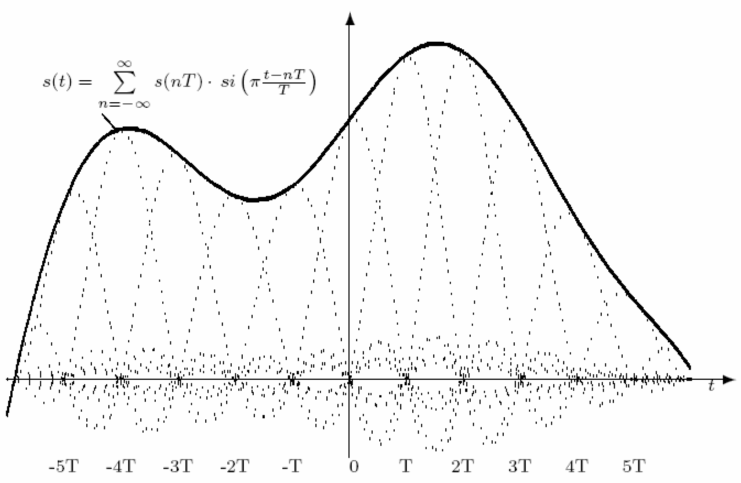
Grafično lahko obliko izreka o vzorčenju ponazorimo z vsoto neskončne vrste Si-funkcij.

Vsak nizkopasovni signal z mejno frekvenco $f_g$ lahko predstavimo brez popačitev, če za ponazoritev uporabimo vsoto za nT zamaknjenih S*i*-funkcij, katerih amplitudni koeficienti si sledijo ekvidistantno v času diskretno z n$T$ = n/(2*fg*).

Maksimumi Si funkcij sovpadajo z vrednostmi v trenutkih nT vzorčenega signala s(t).

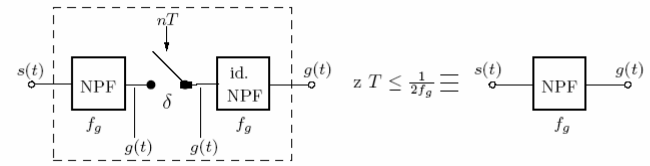


# Diskretna oblika vzorčenega signala



# Ekvivalentni sistemi vzorčenja

Sistem vzorčenja lahko predstavimo z zaporedno vezavo poljubnega nizkopasovnega filtra (NPF), s prenosno funkcijo $H(f)$ in mejno frekvenco $f_g$, idealnega vzorčnika katerega frekvenca vzorčenja znaša $f_s \geq 2f_g$ in idealnega nizkopasovnega filtra z mejno frekvenco $f_g$ ter identično prenosno funkcijo kot neidealen NPF na vhodu sistema.



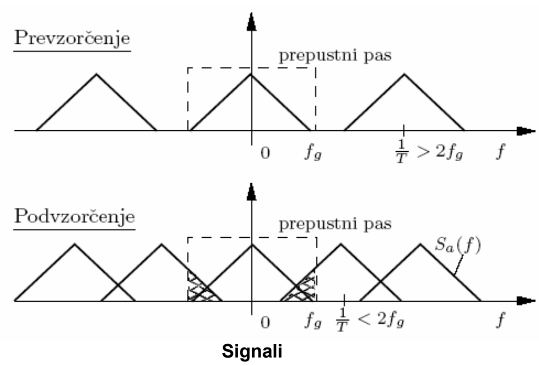

Tak sistem ima ekvivalentno prenosno karakteristiko kot poljuben NPF na vhodu sistema vzorčenja.

Dva sistema sta ekvivalentna, če z meritvijo ne ločimo njihovih prenosnih karakteristik.



# Nyquistova frekvenca vzorčenja

Če vzorčimo s $f_s=2f_g$ ($T=1/2f_g$) imenujemo frekvenco vzorčenja $f_n=1/T=2f_g$ tudi Nyquistova frekvenca. Vzorčenje s frekvenco višjo od Nyquistove je seveda dovoljeno (prevzorčenje) v primeru, da pa je $f_s< 2f_g$ *nastopi* medsebojno prekrivanje periodično ponavljajočih se spektrov vzorčenega signala in S(f) ne moremo rekonstruirati brez popačenj.



# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

Na podoben način kot časovne signale oz. funkcije *s*(*t*) lahko tudi amplitudno gostotne spektre *S*(*f*) predstavimo s frekvenčno diskretnimi vrednostmi. Formulacija izreka o vzorčenju v frekvenčnem prostoru temelji na izreku o simetriji Fourierjeve transformacije.

Upoštevajoč:

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT) \qquad S_a(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

Lahko za amplitudno gostotni spekter *S*(*f*) izpeljemo izraz:

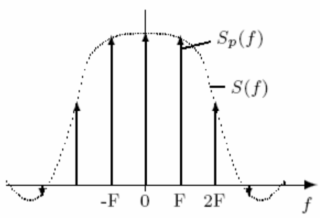
$$S_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF)\delta(f-nF) = S(f)\frac{1}{F}\mathrm{III}\left(\frac{f}{F}\right)$$



# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

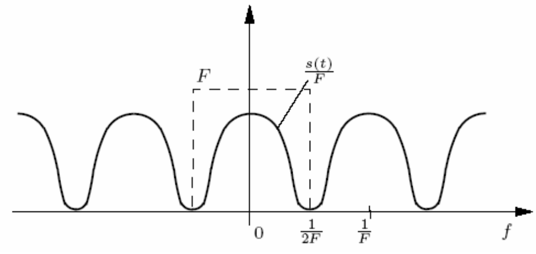
Izraz za časovno obliko signala iz diskretne oblike amplitudno gostotnega spektra dobimo z inverzno Fourierjevo transformacijo:

$$\begin{array}{ccccccc} S_p(f) & = & S(f) & \cdot & \frac{1}{F}\mathrm{III}\left(\frac{f}{F}\right) & & \\ \bullet\!\!-\!\!\circ & & \bullet\!\!-\!\!\circ & & \bullet\!\!-\!\!\circ & & \\ s_p(t) & = & s(t) & * & \mathrm{III}(Ft) & = & \frac{1}{F}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(t-\frac{n}{F}\right) \end{array}$$



# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

Frekvenčno diskretnemu spektru $S_p(f)$ ustreza časovno zvezna (s periodo $1/F$) periodična funkcija $s_p$(t) :




Če je trajanje signala $s(t)$, T≤1/$F$, potem se periodično ponavljajoči deli $s_p(t)$ ne prekrivajo. $s(t)$ lahko izločimo iz periodične inverzne Fourierjeve transformiranke diskretnega amplitudno gostotnega spektra $s_p(f)$ z ustreznim vzorčenjem (zapiranjem stikala vzorčnika) v trajanju T=1/$F$.



# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

Analogno izločitvi S(f) iz periodičnega $S_a$(f) s produktom prenosne funkcije idealnega nizkopasovnega filtra :

$$\begin{array}{ccccc} S(f) & = & S_a(f) & \cdot & Trect\left(\frac{f}{2f_g}\right) \\ \bullet\!\!-\!\!\circ & & \bullet\!\!-\!\!\circ & & \bullet\!\!-\!\!\circ \\ s(t) & = & s_a(t) & * & [2f_g T si(2\pi f_g t)] \end{array}$$

izpeljemo tudi izločitev $s(t)$ iz $s_p(f)$ z ustreznim vzorčenjem :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} s(t) & = & s_p(t) & \cdot & Frect(Ft) \\ \circ\!\!-\!\!\bullet & & \circ\!\!-\!\!\bullet & & \circ\!\!-\!\!\bullet \\ S(f) & = & S_p(f) & * & si\left(\pi \frac{f}{F}\right) \end{array}}$$

# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

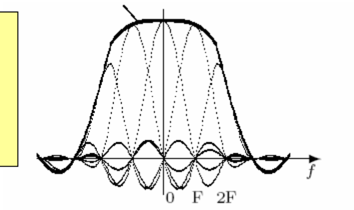
Če uporabimo izraz za diskretno predstavitev amplitudno gostotnega spektra signala S(f) :

$$S_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF)\delta(f-nF) = S(f)\frac{f}{F}\mathrm{III}\left(\frac{f}{F}\right)$$

Lahko konvolucijski produkt S(f), preoblikujemo v vsoto *si*-funkcij z amplitudami *S*(*nF*):

$$S(f) = S_p(f) * si\left(\pi\frac{f}{F}\right) \longrightarrow S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF)si\left(\pi\frac{f-nF}{F}\right)$$

Za *si*-funkcijo je značilen neskončen spekter. Samo na določenih mestih (nF) ima funkcija vrednost nič.
Iz tega lahko sklepamo, da ima vsak časovno omejen signal neomejen spekter.






# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

Podobno kot lahko za signal izrezan z nizkoprepustnim filtrom, ki ga opisuje izraz:

$$s(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT)\right] * si\left(\pi\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)si\left(\pi\frac{t-nT}{T}\right)$$

izpeljemo vsakemu frekvenčno omejenemu signalu ustrezen časovno neomejen signal. Signali, ki bi bili v strogem pomenu tako v časovnem, kot frekvenčnem prostoru omejeni ne obstajajo.

Praktično je vsak signal, če izhajamo iz fizikalnih osnov, časovno omejen (in kavzalen). Fourierjeva transformiranka podaja sicer neskončen spekter takšnega signala, vendar so iz praktičnih razlogov vrednosti nad določeno izbrano frekvenčno mejo zanemarljive.

# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

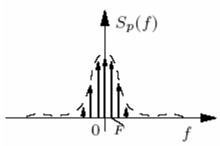
Izraz za vzorčenje v frekvenčnem prostoru:

$$\begin{array}{ccccccl} S_p(f) & = & S(f) & \cdot & \frac{1}{F}\mathrm{III}\left(\frac{f}{F}\right) & & \\ \bullet\!\!\!\mid & & \bullet\!\!\!\mid & & \bullet\!\!\!\mid & & \\ \circ & & \circ & & \circ & & \\ s_p(t) & = & s(t) & * & \mathrm{III}(Ft) & = & \frac{1}{F}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} s\left(t-\frac{n}{F}\right) \end{array}$$

podaja še naslednje naslednje:

Fourierjevo transformiranko $S_p(f)$ periodične časovne funkcije $s_p(t)$ sestavlja ekvidistantno zaporedje Diracovih impulzov. Takšen spekter imenujemo tudi linijski spekter.

Posamezni Diracovi impulzi oz. linije $\delta(f-nF)$ spektra utežene s $S(nF)$ se pojavljajo ekvidistantno v presledkih n$F$.






# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

Medsebojno odvisnost med periodičnimi signali in njihovimi diskretnimi linijskimi spektri najprimerneje predstavimo v obliki Fourierjeve vrste.
Če v enačbo za inverzno Fourierjevo transformacijo:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

Če vstavimo izraz za diskretno predstavitev zveznega spektra $S(f)$ :

$$S_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF)\delta(f-nF) = S(f)\frac{f}{F}\mathrm{III}\left(\frac{f}{F}\right)$$

lahko z upoštevanjem filtrske lastnosti δ(t)*, izpeljemo izraz za predstavitev periodičnih signalov:

$$s_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_p(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF)\delta(f-nF)\right] e^{j2\pi ft} df$$

*$s(t)\delta(t-T) = s(T)\delta(t-T)$

# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

Fourierjev integral je z uporabo filtrske lastnosti δ(t), prešel v Fourierjevo vrsto:

$$s_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} S(nF)\delta(f-nF) \right] e^{j2\pi ft} df \rightarrow s_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} S(nF) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f-nF) e^{j2\pi ft} \right] df$$

$$z\ upoštevanjem\ filtrske\ lastnosti:$$

$$s_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} S(nF) e^{j2\pi nFt}$$

Diskretne vrednosti $S(nF)$ so t.i. Fourierjevi koeficienti ($C_n$) periodičnega signala $s_p(t)$.

$$s_p(t) \quad = \quad s(t) \quad * \quad \text{Ш}(Ft) \quad = \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(t - \frac{n}{F}\right)$$

$C_n$ določimo z integriracijo signala $s_p(t)$ znotraj ene same periode $T = 1/F$:

$$S(nF) = C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi nFt} dt$$



# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

Če razstavimo $S(nF)$ in $e^{j2nFt}$ v realni in imaginarni del (Evklidov obrazec), dobimo iz:

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF) e^{j2\pi nFt}$$

za realne časovne funkcije z upoštevanjem:

$$Re\{S(f)\} \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} s_s(t)\cos(2\pi ft) dt$$

$$Im\{S(f)\} \quad = \quad -\int_{-\infty}^{\infty} s_l(t)\sin(2\pi ft) dt$$

$$\Downarrow$$

$$s_p(t) = S(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[ Re\{S(nF)\}\cos(2\pi nFt) - Im\{S(nF)\}\sin(2\pi nFt) \right]$$

# Vzorčenje v frekvenčnem prostoru

S substitucijo $S(0) = a_0$, $2Re\{S(nF)\} = a_n$ in $-2Im\{S(nF)\} = b_n$, lahko izraz:

$$s_p(t) = S(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[Re\{S(nF)\}\cos(2\pi nFt) - Im\{S(nF)\}\sin(2\pi nFt)\right]$$

Preoblikujemo v najpogosteje zapisano obliko Fourierjeve vrste:

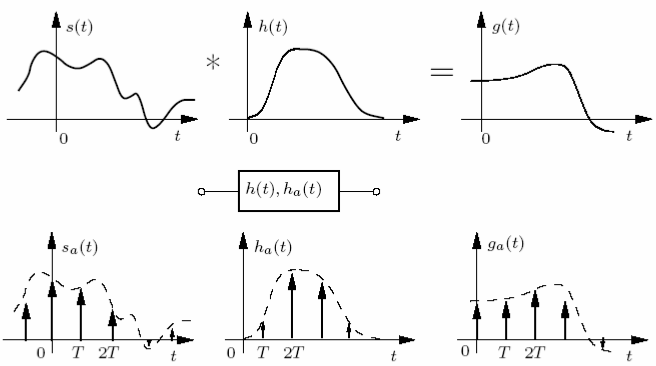
$$\boxed{s_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(2\pi nFt) + b_n\sin(2\pi nFt)\right]}$$



# Časovno diskretni signali in sistemi

Pri izpeljavi izreka o vzorčenju smo ugotovili, da lahko vsak frekvenčno omejen signal popolnoma opišemo z vzorčenimi vrednostmi (otipki) pri pogoju $f_s \geq 1/T$. Izrek lahko razširimo tudi za opis signalov, ki jih prenašamo prek frekvenčno omejenih LTI sistemov.

Vprašanje je, kako lahko izračunamo $g_a(t)$ neposredno iz $s_a(t)$ in $h_a(t)$.



# Diskretna konvolucija

Izhajajoč iz teorema vzorčenja (z največjo periodo vzorčenja T= 1/$f_g$ oz. Nyquistovi frekvenci):

$$s(t)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT)\right]*si\left(\pi\frac{t}{T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)si\left(\pi\frac{t-nT}{T}\right)$$

Lahko konvolucijski produkt *g*(*t*) = *s*(*t*) ∗ *h*(*t*) preoblikujemo v:

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT)\right]*si\left(\pi\frac{t}{T}\right)=\left(\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT)\right]*si\left(\pi\frac{t}{T}\right)\right)*\left(\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT)\right]*si\left(\pi\frac{t}{T}\right)\right)$$

Če izhajamo iz konvolucijskega produkta dveh si-funkcij lahko izraz preoblikujemo:

$$si\left(\pi\frac{t}{T}\right)*si\left(\pi\frac{t}{T}\right)=|T|si\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT)\right]=T\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT)\right]*\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT)\right]\quad T>0$$



# Diskretna konvolucija

Izraz za diskreten konvolucijski produkt lahko nadalje preoblikujemo z vpeljavo konvolucijskega integrala:

$$g(t)=s(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT)\right]=T\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT)\right]*\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT)\right]\quad T>0$$

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT)\right]=T\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(\tau-nT)\right]\cdot\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-\tau-nT)\right]d\tau$$

in vpeljavo novih spremenljivk:

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT)\right]=T\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)\delta(\tau-mT)\right]\cdot\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(iT)\delta(t-\tau-iT)\right]d\tau$$

# Diskretna konvolucija

Če upoštevamo še filtrsko* lastnost δ(t) izraz za diskreten konvolucijski produkt še nadalje preoblikujemo:

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT)\right] = T\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)\delta(\tau-mT)\right]\cdot\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(iT)\delta(t-\tau-iT)\right]d\tau$$

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT)\right] = T\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} s(mT)h(iT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-mT)\cdot\delta(t-\tau-iT)d\tau$$

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT)\right] = T\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} s(mT)h(iT)\delta(t-(i+m)T)$$

Če uporabimo nadaljnjo substitucijo i+m=n:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)h([n-m]T)\delta(t-nT)$$

*$s(t)\delta(t-T) = s(T)\delta(t-T)$



# Diskretna konvolucija

Lahko iz:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)h([n-m]T)\delta(t-nT)$$

za zaporedne otipke zapišemo z izrazom:

$$g(nT) = T\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)h([n-m]T)$$

Povezava zaporednih otipkov predstavlja izraz za diskretno konvolucijo, ki je temelj obravnave časovno diskretnega prenosa signalov. <u>Parameter vzorčenja *T* je bistven za sam proces vzorčenja in interpolacijo zaporedja otipkov</u>. Če pa obravnavamo zgornjo enačbo zgolj kot proces digitalnega procesiranja signalov, potem moremo brez izgube informacije postaviti *T* = 1.

# Diskretna konvolucija

Pri interpolaciji za izhodni signal *g*(*t*) lahko parameter T ustrezno ovrednotimo, zato pogosto pišemo diskretno konvolucijo pri vrednosti *T* = 1 tudi kot:

$$g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)h(n-m)$$

V simbolni obliki ponavadi izraz zapišemo tudi v obliki:

$$\boxed{g(n) = s(n) * h(n)}$$

Diskretna konvolucija je kot izpeljanka oz. poseben primer časovno zvezne konvolucije glede na operacijo seštevanja asociativna, komutativna in distributivna.



# Časovno diskretni elementarni signali

Pomembno je razlikovati med vzorčenim signalom $s_a(t)$ in zaporedjem amplitud vzorčenih vrednosti signala *s*(*n*). Časovno diskreten signal obravnavamo izključno kot zaporedje amplitud *s*(*nT*) oziroma *s*(*n*). V literaturi se rabi tudi zapis *s*[*n*] .

Podobno, kot smo kompleksne signale v časovno zveznem prostoru razčlenili na manjše t.i. elementarne signale, bomo to storili tudi za diskretni prostor.

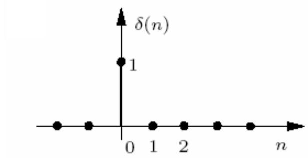
Temeljni gradnik diskretnega časovnega prostora je, analogno gradniku v zveznem časovnem prostoru, definiran kot enotin impulz diskretnega časovnega prostora $\delta(n)$, ki predstavlja enoto za diskretno konvolucijo:

$$s(n) = \delta(n) * s(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\delta(n-m)$$

# Časovno diskretni elementarni signali

Iz tega sledi definicija elementarnega gradnika diskretnega časovnega prostora Diracovega impulza:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{za } n = 0 \\ 0 & \text{za } n \neq 0 \end{cases}$$

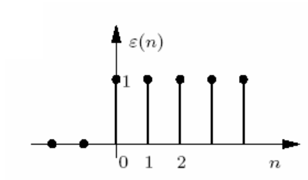



Enotin impulz $\delta(n)$ ne potrebuje v nasprotju z Diracovim impulzom $\delta(t)$ nobenih posebnih matematičnih predpostavk in predstavlja s tem splošen gradnik časovno diskretnih signalov.

Enotino stopnico $\varepsilon(n)$ lahko opišemo kot vsoto enotinih impulzov:

$$\boxed{\varepsilon(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)}$$

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n \geq 0 \end{cases}$$

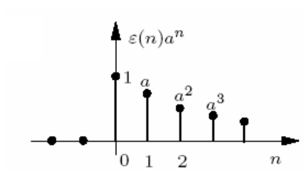





# Časovno diskretni elementarni signali

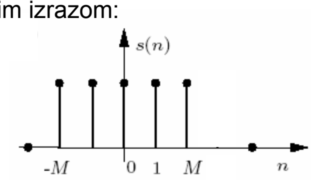
Časovno diskretni eksponentni impulz lahko opišemo z izrazom:

$$\boxed{s(n) = \varepsilon(n)a^n}$$




Pravokoten signal je definiran z naslednjim izrazom:

$$\boxed{s(n) = \varepsilon(n+M) - \varepsilon(n-M)}$$




Diskretno časovno zaporedje v obliki lastne funkcije pa lahko zapišemo kot:

$$s(n) = exp(j2\pi f_0 n) = \cos(2\pi f_0 n) + j\sin(2\pi f_0 n)$$

# Linearni od pomika neodvisni sistemi

Časovno diskretni sistem ali vzorčevalni sistem je določen z enoumno prireditvijo časovno diskretnega izhodnega signala *g*(*n*) za poljuben vhodni signal *s*(*n*). Med temi sistemi izstopajo linearni pomično neodvisni sistemi (Linear Shift Invariant systems = LSI) zaradi preproste transformacijske enačbe:

$$g(n) = Tr\{s(n)\}$$

Časovno diskretni sistem je linearen, če je za poljubne signale $s_i(n)$ izpolnjen naslednji izraz:

$$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(n)\right\} = \sum_i a_i Tr\{s_i(n)\} = \sum_i a_i g_i(n)$$

Časovno diskreten sistem je pomično neodvisen, če velja za vse celoštevilčne *m* transformacijska enačba:

$$Tr\{s(n-m)\} = g(n-m)$$



# Linearni od pomika neodvisni sistemi

Z uporabo izraza za diskretno konvolucijo in izreka o linearnosti:

$$s(n) = \delta(n) * s(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\delta(n-m)$$

$$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(n)\right\} = \sum_i a_i Tr\{s_i(n)\} = \sum_i a_i g_i(n)$$

lahko transformacijsko enačbo za LSI sisteme dopolnimo:

$$g(n) = Tr\{s(n)\} = Tr\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\delta(n-m)\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)Tr\{\delta(n-m)\}$$

# Linearni od pomika neodvisni sistemi

Če izhajamo iz definicije impulznega odziva časovno diskretnega sistema, ki jo lahko predstavimo s transforamacijsko enačbo:

$$h(n) = Tr\{\delta(n)\}$$

potem lahko transformacijsko enačbo za LSI sisteme nadalje dopolnimo :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)Tr\{\delta(n-m)\} \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)h(n-m) = s(n) * h(n)$$

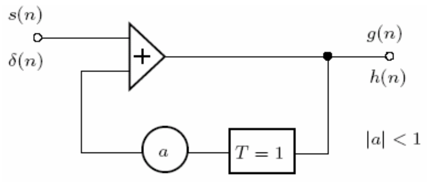
Dobljeni transformacijski izraz LSI sistema je ekvivalenten izrazu za diskretno konvolucijo:

$$g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)h(n-m)$$



# Primer diskretne konvolucije

Kot zgled bomo obravnavali preprost rekurziven časovno diskreten sistem (s povratno povezavo):




Vhod in izhod sistema določa naslednji izraz:

$$g(n) = s(n) + ag(n-1)$$

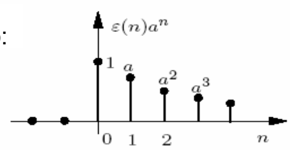
Za impulzni odziv vezja (g(n)=h(n), s(n)=δ(n)) lahko zapišemo rekurzivno enačbo:

$$h(n) = \delta(n) + ah(n-1)$$

# Primer diskretne konvolucije

Impulzni odziv vezja lahko nadalje preoblikujemo:

$$h(n) = \quad \delta(n) + a\delta(n-1) + a^2\delta(n-2) + \dots$$




Če uporabimo izraz za diskretni opis eksponentno padajoče funkcije:

$$s(n) = \varepsilon(n)a^n$$

lahko impulzni odziv vezja preoblikujemo v:

$$\boxed{h(n) \; = \; \varepsilon(n)a^n}$$

Sistem je kavzalen in za |*a*| < 1 tudi amplitudno stabilen. Njegov impulzni odziv je amplitudno padajoč.



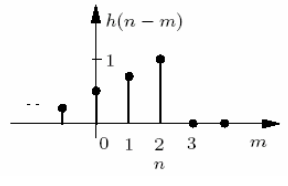
# Primer diskretne konvolucije

Če poznamo impulzni odziv vezja lahko ocenimo odziv na poljuben vhodni signal. Če na vhod vezja pripeljemo pravokoten signal:

$$s(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-M)$$

in izhajamo iz izraza za diskretno konvolucijo:

$$g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)h(n-m)$$




lahko izpeljemo:

$$g(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} s(m)\varepsilon(n-m)a^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} a^{n-m}$$

# Primer diskretne konvolucije

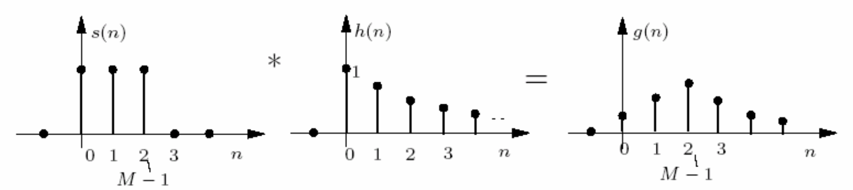
V intervalu 0≤n<M lahko izraz zapišemo kot vsoto geometrijske vrste:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad q \neq 1 \quad \longrightarrow \quad g(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad a \neq 1$$

V intervalu n≥M pa izraz preoblikujemo v:

$$g(n) = \sum_{m=0}^{M-1} a^{n-m} = \frac{a^{n-M+1} - a^{n+1}}{1-a}$$

V intervalu n<0 je g(n)=0.




# Fourierjeva transformacija časovno diskretnih signalov

Razmerje med časovno diskretnimi signali in sistemi opisuje Fourierjeva transformacija kot pri časovno zveznih primerih. Zato velja:

$$\begin{aligned} s_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \\ S_a(f) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f-\frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

Fourierjev spekter $S_a(f)$ lahko izračunamo tudi neposredno iz otipanih amplitudnih vrednosti. Če uporabimo izraz za Fourierjevo transformacijo in vanj vstavimo $s_a(t)$:

$$S_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT)e^{-j2\pi ft}dt$$

# Fourierjeva transformacija časovno diskretnih signalov

Z uporabo filtrske lastnosti δ(t) in uporabo δ(t) kot osnovnega gradnika:

$$s(t)\cdot\delta(t-T)=s(T)\cdot\delta(t-T)$$

$$s(t)=s(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

lahko izraz preoblikujemo:

$$S_a(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(nT)\delta(t-nT)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$S_a(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(nT)\delta(t-nT)e^{-j2\pi fnT}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(nT)e^{-j2\pi fnT}\right]\delta(t-nT)dt$$

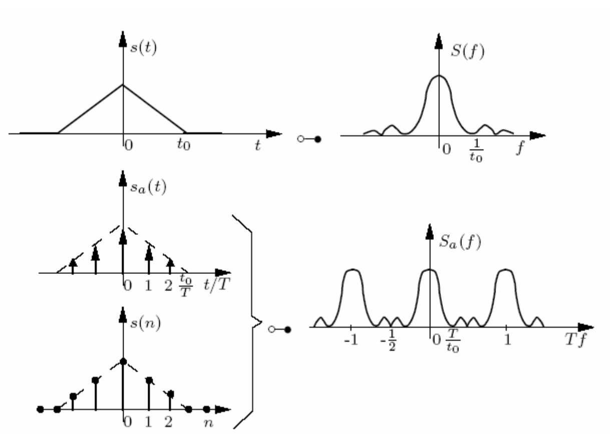
in dobimo:

$$\boxed{S_a(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(nT)e^{-j2\pi fnT}}$$



# Fourierjeva transformacija časovno diskretnih signalov

Povezava med otipanim signalom in pripadajočim periodičnim spektrom na primeru trikotnega impulza:



# Fourierjeva transformacija časovno diskretnih signalov

Iz izpeljanega izraza za periodičnost spektra:

$$S_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) e^{-j2\pi f n T}$$

Je razvidno, da je periodični spekter $S_a(f)$ odvisen samo od otipanih vrednosti $s(nT)$ in ga zato lahko formalno priredimo časovno diskretnim vrednostnim signala $s(nT)$. Če v enačbi ponovno postavimo $T = 1$, lahko spekter časovno diskretnih signalov $s(n)$ preoblikujemo:

$$S_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-j2\pi f n} \qquad T = 1$$

Tako lahko za vsak frekvenčno zvezni spekter, ki je periodičen s periodo T=1, določimo signal $s(n)$ z inverzno Fourierjevo transformacijo:

$$s(n) = \int_{-1/2}^{1/2} S_a(f) e^{j2\pi n f} df$$



# Diskretna Fourierjeva transformacija

Fourierjeva transformiranka časovno diskretnega signala $s(n)$, je frekvenčno zvezni periodični spekter $S_a(f)$ (sestavljen iz neskončnega števila diskretnih frekvenc).

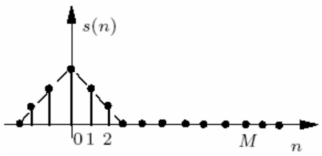
$S_a(f)$ lahko pri numeričnem računanju (diskretno procesiranje) določimo samo končno število diskretnih frekvenc. V numerični matematiki se zato uporablja t.i. diskretno Fourierjevo transformacijo (DFT), ki časovno diskretnemu signalu priredi frekvenčno diskreten spekter.

DFT je pri procesiranju signalov zelo pomembna, ker imamo pri njenem preračunu v obliki hitre Fourierjeve transformacije (FFT) na voljo učinkovite algoritme.

Diskretna Fourierjeva transformacija združuje (povezuje) vzorčenje v časovnem in frekvenčnem prostoru.

# DFT - Vzorčenje v časovnem in frekvenčnem področju

Časovno diskreten signal *s*(*n*) je omejen na neko končno število diskretnih vrednosti $0 \leq n < M$.



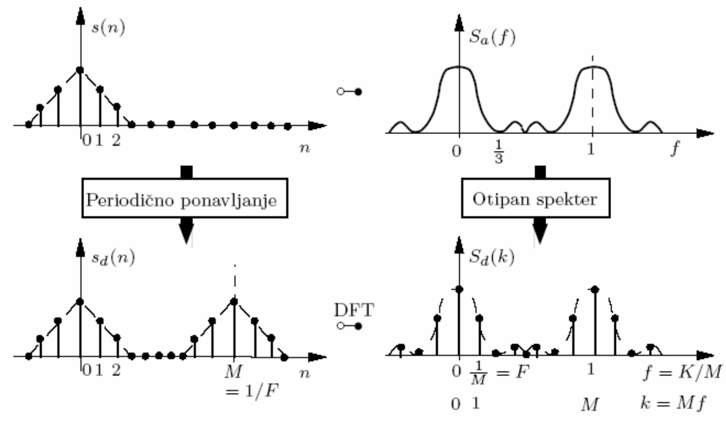

Po izreku o vzorčenju v frekvenčnem prostoru zadostuje, da vzorčene vrednosti spektra izračunamo v razmikih recipročne vrednosti M ($F = 1/M$). Na tak način dobljenemu vzorčenemu spektru $S_d(k)$ lahko z inverzno Fourierjevo tranformacijo izračunamo časovno diskretni signal $s_d(n)$, ki je periodčen s periodo *M.*

$$S_p(f) = S(f) \cdot \frac{1}{F}\text{III}\left(\frac{f}{F}\right)$$

$$s_p(t) = s(t) * \text{III}(Ft) = \frac{1}{F}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(t - \frac{n}{F}\right)$$

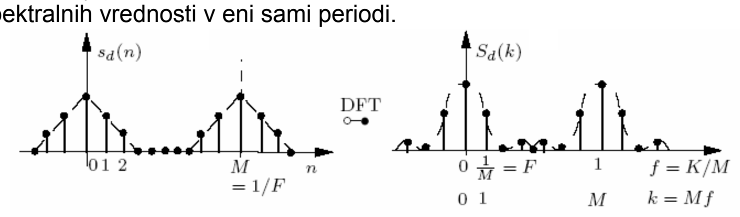


# DFT - Vzorčenje v časovnem in frekvenčnem področju



# DFT - Vzorčenje v časovnem in frekvenčnem področju

Spekter $S_d(k)$ je periodičen, zato je dovolj, če izračunamo zgolj $M$ spektralnih vrednosti v eni sami periodi.




Če vstavimo za $f = k/M$ v:

$$S_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-j2\pi fn} \qquad T = 1$$

dobimo v intervalu ene same periode frekvenčno diskretno periodično transformiranko $S_d(k)$ časovno diskretnega, periodičnega signala $s_d(n)$.

$$\boxed{S_d(k) = \sum_{n=0}^{M-1} s_d(n) e^{-j2\pi nk/M} \qquad k = 0, ..., M-1}$$



# Inverzna DFT

Izraz za inverzno DFT je analogno:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \rightarrow \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$S_d(k) = \sum_{n=0}^{M-1} s_d(n) e^{-j2\pi nk/M} \quad \rightarrow \quad \boxed{s_d(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} S_d(k) e^{j2\pi nk/M}}$$

Zaradi obeh izrazov bo diskretni funkciji $S_d(k)$ prirejenih $M$ (kompleksnih) vrednosti ene periode diskretne časovne funkcije $s_d(n)$. Takšnim periodičnim diskretnim signalom pravimo tudi končni signali.

# Diskretna Fourierjeva transformacija

Diskretna Fourierjeva transformacija je samo poseben primer splošne Fourierjeve transformacije za diskretne in periodične funkcije. Vsi izreki so tudi za DFT veljavni, npr. izrek o premiku :

$$s_d(n-m) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_d(k)e^{-j2\pi mk/M}$$

Ostale lahko na kratko povzamemo:

| | | |
|---|---|---|
| razstavitev | $\begin{cases} s_{ds}(n) \\ s_{dl}(n) \end{cases}$ | $Re\{S_d(k)\}$<br>$jIm\{S_d(k)\}$ |
| časovni obrat | $s_d(-n)$ | $S_d(-k)$ |
| kompleksni $s(n)$ | $s_d^*(n)$ | $S_d^*(-k)$ |
| simetrija | $S_d(n)$ | $MS_d(-k)$ |



# Diskretna konvolucija

Za DFT je posebnega pomena izrek o konvoluciji. Diskretno konvolucijo izračunamo s produktom dveh časovno omejenih (n < *M* ) diskretnih signalov npr. *s*(*n*) in *h*(*n*).

$$g(n) = s(n) * h(n)$$

Periodično ponavljajoči $g_d(n)$ dobimo, če ponavljamo konvolucijski produkt $g(n)$ s periodo M. Signal $g_d(n)$ pa lahko izračunamo tudi iz periodično ponavljajočih signalov $s_d(n)$ in $h_d(n)$:

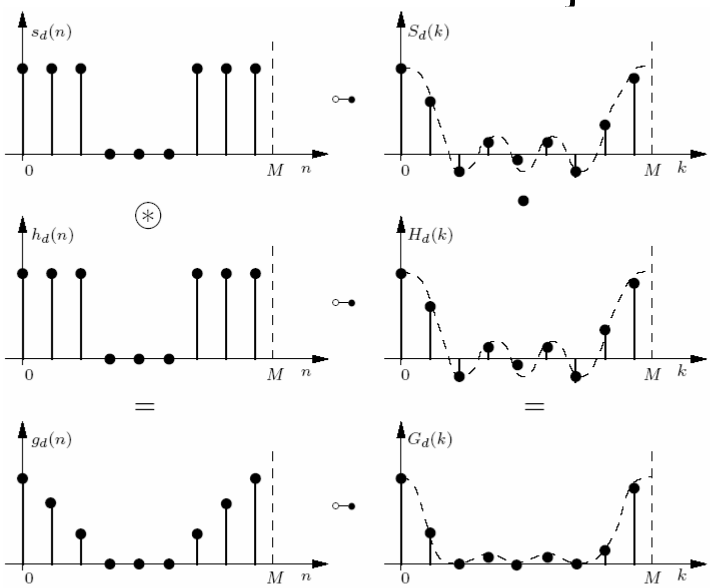
$$g_d(n) = \sum_{m=0}^{M-1} s_d(m)h_d(n-m) \quad \text{za} \quad n = 0, ..., M-1$$

Rezultat imenujemo tudi periodična ali krožna konvolucija.

Konvolucijski izrek za DFT je tako:

$$\boxed{g_d(n) = s_d(n) \circledast h_d(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G_d(k) = S_d(k) \cdot H_d(k)}$$

# Diskretna konvolucija






# Diskretna konvolucija

Najpogosteje se uporablja periodična konvolucija za izračun konvolucijskega produkta neperiodičnih, časovno omejenih signalov. Pomembno je kako pri tem oceniti (izbrati) razmerje med trajanjem signala $M_1$ in pravilno periodo rezultata konvolucije *M* za signal $g_d(n)$.

Pri oceni periode moramo upoštevati periodično ponavljanje konvolucijskih produktov $g(n)$ oz. $g_d(n)$ in na prekrivanje, ki bi nastopila ob morebitni neustrezni izbiri M.

Pri procesiranju signalov se lahko srečamo tudi  s konvolucijskim produktom signala poljubne dolžine $s(n)$ in končnega impulznega odziva sistema h($n$). Pri tem moramo $s(n)$ zaradi lažje obravnave razčleniti na delne signale $s_i(n)$ končnega trajanja npr. $M_1$. Iz izreka o distributivnosti konvolucije nato sledi (izraz za t.i. segmentirano konvolucijo):

$$s(n) * h(n) = \left[\sum_i s_i(n)\right] * h(n) = \sum_i [s_i(n) * h(n)]$$

# Z - transformacija

V splošnem diskretni časovni signali niso absolutno seštevni. To pomeni, da obstajajo v spektru $S_a(f)$ poli ali Diracovi impulzi in izraz:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = |s(n)|$$

ni števen oz. vsota ni končna. Ustrezno kot pri Laplaceovi transformaciji kjer smo absolutno integrabilnost rešili z dodajanjem utežene funkcije, lahko tudi v diskretnem primeru vplivamo na konvergenco za del signalov, če vpeljemo eksponentno funkcijo $e^{\sigma n}$:

$$e^{-\sigma n} s(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-\sigma n} e^{-j2\pi n f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-(\sigma + j2\pi f)n}$$

S substitucijo $z = e^{\sigma + j2\pi f}$ dobimo dvostransko z-transformacijo signala $s(n)$:

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n}$$

Za kavzalne signale opisuje izraz enostransko z-transformacijo.



# Z – transformacija in kavzalni signali

Za kavzalne signale opisuje:

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n}$$

zgolj enostransko z-transformacijo (samo v I. in IV. kvadrantu). Tako npr. dobimo za eksponentni impulz $s(n) = \varepsilon(n) \cdot a^n$ enostransko z-transformacijo:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Zgornji izraz lahko preoblikujemo v geometrijsko vrsto:

$$S(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{za} \quad |z| > |a|$$

# Z-transformacija

Če kompleksno frekvenčno spremenljivko ***z***, razčlenimo v modul in argument :

$$z = |z| e^{j\varphi_z} = e^{\sigma} \cdot e^{j2\pi f}$$

Na tak način zapisano kompleksno spremenljivko obravnavamo v polarnem koordinatnem sistemu (z-ravnina) kot dolžino radija vektorja ($e^{\sigma}$) in njemu pripadajočega faznega kota ($2\pi f$).

Vsaka krožnica, ki jo opiše amplituda kompleksne spremenljivke ($e^{\sigma}$=konst.) predstavlja pravzaprav eno periodo Fourierjevega spektra $S_a(f)$ za uteženi, časovno diskretni signal s(n) $e^{-\sigma n}$.

Konvergenčno področje funkcije leži v kolobarju izven krožnice |z|=|a|:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| s(n) e^{-\sigma n} \right| < \infty$$

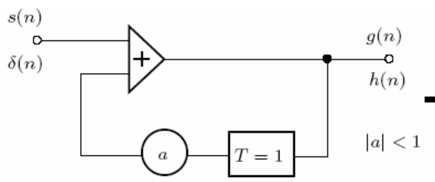


# Konvolucijski teorem

Z izpolnjenim pogojem konvergenčnega področja funkcije veljajo teoremi Fourierjeve transformacije tudi za z-transformacijo. Konvolucijski teorem lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} g(n) &= s(n) * h(n) \\ &\ \ \Big\updownarrow \mathrm{Z} \\ G(z) &= S(z) \cdot H(z) \end{aligned}$$

Z-transformacija opisuje tudi prenosno funkcijo *H*(*z*) rekurzivnega sistema:




$$\begin{aligned} h(n) &= \varepsilon(n) a^n && \text{za poljuben } a! \\ &\ \ \Big\updownarrow \mathrm{Z} \\ H(z) &= \frac{1}{1 - a z^{-1}} && \text{za } |z| > |a| \end{aligned}$$