SIGNALI

Fourierjeva transformacija

Časovni in frekvenčni prostor

- K analizi signalov in sistemov lahko pristopimo na več načinov
  - v časovnem prostoru (s konvolucijskim integralom oz. konvolucijskim produktom) časovna analiza zveznih/diskretnih signalov
  - v frekvenčnem prostoru s Fourierjevo analizo t.i. spektralna analiza (časovno zvezni/ diskretni signali – frekvenčno zvezni/diskretni signali) Kompleksnost konvolucijskega produkta poenostavimo z algebraičnim produktom
  - z drugimi transformacijami ustreznejšimi za obravnavo časovno/amplitudno diskretnih signalov.

Lastne funkcije LTI sistemov

Če poznamo impulzni odziv sistema h(t) potem lahko s konvolucijskim produktom ocenimo odziv na vzbujanje s poljubnim signalom s(t):

$$s(t) * h(t) = g(t)$$

Obstajajo signali oz. funkcije $s_E(t)$, katerih odziv poljubnega LTI sistema opisuje naslednji izraz:

$$s_E(t) * h(t) = H \cdot s_E(t)$$

Matematično lahko takšne funkcije, ki jih v teoriji linearnih diferencialnih enačb imenujemo <u>lastne funkcije</u>, zapišemo kot kompleksen eksponentni signal oz. elementarni signal:

$$s_E(t) = e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)$$

Če navedeno funkcijo vstavimo v konvolucijski integral (z upoštevanjem komutativnosti):

$$h(t) * e^{j2\pi ft} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi ft} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{H}$$

Prenosna funkcija sistema

Amplitudni faktor H je odvisen od parametra frekvenčnih parametrov impulznega odziva sistema in predstavlja v sistemski teoriji prenosno funkcijo sistema :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

spremenljivko τ smo nadomestili s t

Odziv v kaskado povezanih sistemov, katerih prenosni funkciji (oz. impulzna odziva) sta $h_1(t)$ oz. $h_2(t)$ brez povratne zanke, je identičen odzivu na vzbujanje z lastno funkcijo $s_E(t)$:

$$[s_E(t) * h_1(t)] * h_2(t) = [H_1(f) \cdot s_E(t)] * h_2(t) = H_1(f) \cdot H_2(f) \cdot s_E(t)$$

Če sistem vzbujamo s $s_E(t)$ ni potrebno prenosne funkcije računati preko konvolucijskega produkta impulznih odzivov v časovnem prostoru ampak lahko nadomestno prenosno funkcijo v kaskado vezanih sistemov določimo s produktom prenosnih funkcij v frekvenčnem prostoru saj velja:

$$h(t) * s_E(t) = H(f) \cdot s_E(t)$$

Fourierjev integral

Transformacijska enačba med impulznim odzivom h(t) in prenosno funkcijo H(f) je t.i. Fourierjeva transformaciia

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Zgornja transformacijska enačba podaja relacijo med impulznim odzivom h(t) in prenosno funkcijo H(f). Obratno relacijo podaja inverzna Fourierjeva transformacija:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df$$

Če v konvolucijskem produktu z $s_E(t)$ uporabimo poljuben signal s(t) namesto impulznega odziva, izpeljemo naslednji izraz:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft}df$$

Integral predstavlja neskončno vrsto elementarnih signalov $s_E(t)$

Amplitudno gostotni spekter

Amplitudni faktor v integralu, *S*(*f*), izračunamo s pomočjo Fourierjevega integrala:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Po Fourierju transformiran signal imenujemo Fourierjev spekter. S(f) ima amplitudno-frekvenčno dimenzijo, zato ga imenujemo tudi amplitudno gostotni spekter.

Spekter odziva poljubnega LTI sistema dobimo iz prenosne funkcije H(f), če poznamo S(f) (amplitudno gostotni spekter) vhodnega signala s(t). Z upoštevanjem:

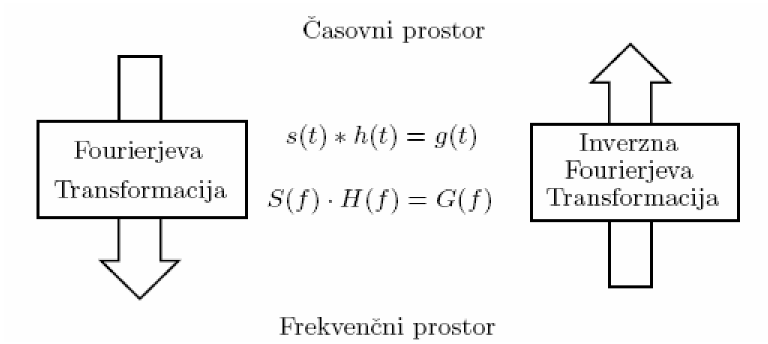
$$[s_E(t) * h_1(t)] * h_2(t) = [H_1(f) \cdot s_E(t)] * h_2(t) = H_1(f) \cdot H_2(f) \cdot s_E(t)$$

zadostuje, da S(f) in H(f) med seboj pomnožimo za vsako vrednost frekvence:

$$S(f) \cdot H(f) = G(f)$$

Preslikava
časovni prostor – frekvenčni prostor

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt \qquad S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$



Simbolni zapis Fourierjevega integrala

V okrajšanem simbolnem zapisu lahko Fourierjevo transformiranko signala in njegov inverzni transform zapišemo kot:

$$S(f) = \mathfrak{F}\{s(t)\} \longrightarrow S(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, s(t)$$

Za amplitudno gostotni spekter lahko torej integral zapišemo v simbolni obliki:

$$\boxed{H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt \longrightarrow h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(f)}$$

Prenosno funkcijo sistema določimo s Fourierjevo transformacijo impulznega odziva sistema!

Konvolucijski produkt v časovnem prostoru se v frekvenčnem prostoru transformira v algebraičen produkt.

$$s(t) = s(t) * \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = S(f) \cdot \mathfrak{F}\{\delta(t)\}$$

Fourierjeva transformacija in δ(t)

Če izhajamo iz:

$$s(t) = s(t) * \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = S(f) \cdot \mathfrak{F}\{\delta(t)\} \quad \text{in:} \quad S(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, s(t)$$

velja za Fourierjevo transformiranko δ(t):

$$\boxed{\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = 1 \;\Rightarrow\; \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1}$$

δ(t) kot osnovna enota v konvolucijski algebri se transformira v konstanto.

Če je δ(t) impulzni odziv LTI sistema (idealnega sistema brez popačitev) potem velja za prenosno funkcijo tega sistema:

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(f)$$

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1 \quad \Rightarrow \quad H(f) = 1$$

Realne časovne funkcije

V splošnem za vse realne časovne funkcije velja, da je realni del funkcije soda, imaginarni del pa liha funkcija. Vsako tako funkcijo s(t), lahko razčlenimo v sodo in liho komponento:

$$s(t) = s_s(t) + s_l(t)$$

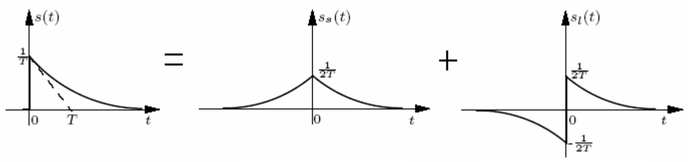
Sodo komponento zapišemo kot:

$$s_s(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s(-t)$$

liho komponento kot:

$$s_l(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s(-t)$$

Primer eksponentne funkcije:



$$s(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \qquad s(t) = \frac{1}{2T}e^{-\frac{t}{T}} + \frac{1}{2T}e^{\frac{t}{T}} \qquad s(t) = \frac{1}{2T}e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{2T}e^{\frac{t}{T}}$$

Fourierjeva transformacija realnih časovnih funkcij

Če vstavimo na sodi in lihi del razčlenjeno realno časovno funkcijo v izraz za Fourierjev integral:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{[s_s(t) + s_l(t)]}_{s(t)} \underbrace{[\cos(2\pi f t) - j\sin(2\pi f t)]}_{e^{-j2\pi f t}} dt$$

Eulerjeva obrazca

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

in izraz preuredimo:

$$\begin{aligned} S(f) \quad = \quad & \int_{-\infty}^{\infty} s_s(t)\cos(2\pi f t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} s_l(t)\sin(2\pi f t)dt \\ & -j\int_{-\infty}^{\infty} s_s(t)\sin(2\pi f t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} s_l(t)\cos(2\pi f t)dt \end{aligned}$$

ter upoštevamo, da sta integrala lihih funkcij nič izpeljemo izraz:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_s(t)\cos(2\pi f t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} s_l(t)\sin(2\pi f t)dt$$

Fourierjeva transformacija realnih časovnih funkcij

Če funkcijo razstavimo v realni in imaginarni del, velja za realne časovne funkcije:

$$Re\{S(f)\} \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} s_s(t)\cos(2\pi f t)dt$$

integrand je soda funkcija, ker je cos(x) soda funkcija

$$Im\{S(f)\} \quad = \quad -\int_{-\infty}^{\infty} s_l(t)\sin(2\pi f t)dt$$

integrand je liha funkcija, ker je sin(x) liha funkcija

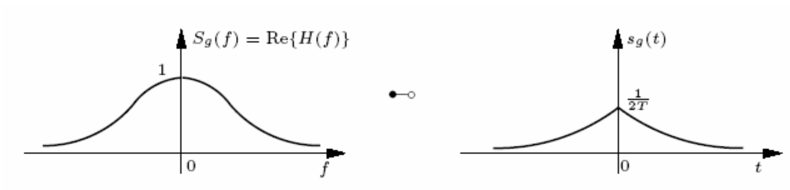
Če predstavlja signal s(t) realno sodo časovno funkcijo, potem je funkcija njenega amplitudnega poteka (absolutna vrednost njenega amplitudno gostotnega spektra) soda funkcija, fazni potek pa liha funkcija:

Fourierjeva transformacija realnih časovnih funkcij

V simbolnem zapisu lahko na sodo in liho komponento razčlenjeni signal s(t) zapišemo po spektralnih komponentah:

$$\begin{array}{ccccc} s(t) & = & s_s(t) & + & s_l(t) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ S(f) & = & Re\{S(f)\} & + & jIm\{S(f)\} \end{array}$$

Fourierjevo transformiranko $s(t)=s_S(t)$ (realne sode časovne funkcije) predstavlja zgolj realni del transformiranke, ki je soda funkcija medtem, ko predstavlja Fourierjevo transformiranko $s(t)=s_L(t)$ (lihe realne časovne funkcije) zgolj njena imaginarna komponenta, ki je liha funkcija:



Fourierjeva transformacija konjugirano kompleksnih časovnih funkcij

$$\boxed{s^*(t) \circ\!-\!\bullet\, S^*(-f)}$$

Dve kompleksni števili imenujemo medsebojno konjugirani, če imata enaki realni komponenti, imaginarni pa nasprotni.

Izpeljemo jo iz: $s(t) = s_1(t) + js_2(t)$

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{s(t)} & = & s_{1s}(t) & + & s_{1l}(t) & + & js_{2s}(t) & + & js_{2l}(t) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathrm{S(f)} & = & Re\{S_1(f)\} & + & jIm\{S_1(f)\} & + & jRe\{S_2(f)\} & - & Im\{S_2(f)\} \end{array}$$

$$S(-f) = Re\{S_1(f)\} - jIm\{S_1(f)\} + jRe\{S_2(f)\} + Im\{S_2(f)\}$$

$$S^*(-f) = Re\{S_1(f)\} + jIm\{S_1(f)\} - jRe\{S_2(f)\} + Im\{S_2(f)\}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} s^*(t) & = & s_{1s}(t) & + & s_{1l}(t) & - & js_{2s}(t) & - & js_{2l}(t) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathfrak{F}\{s^*(t)\} & = & Re\{S_1(f)\} & + & jIm\{S_1(f)\} & - & jRe\{S_2(f)\} & + & Im\{S_2(f)\} \end{array}$$

Izreki Fourierjeve transformacije

- Izrek superpozicije

Fourierjeva transformacija vsote časovnih funkcij je
enaka vsoti Fourierjevih transformacij posameznih časovnih funkcij:

Zaradi linearnosti določenega integrala velja za Fourierjevo transformacijo vsote časovnih funkcij:

$$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)] e^{-j2\pi f t} dt$$

Nadalje lahko v simbolni obliki zapišemo:

$$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a_1 S_1(f) + a_2 S_2(f)$$

Oziroma splošneje:

$$\boxed{\sum_i a_i s_i(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_i a_i S_i(f)}$$

Izreki Fourierjeve transformacije

- Izrek enakosti

Za obravnavo časovno normiranih signalov je zelo pomembna povezava med razširjenim signalom *s*(*bt*) in Fourierjevo transformiranko S(f):

$$s(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} s(bt) e^{-j2\pi f t} dt$$

Če vpeljemo substitucijo bt=θ lahko za b>0 izpeljemo:

$$s(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} s(\Theta) e^{-j2\pi \Theta f/b} d\Theta = \frac{1}{b} S\left(\frac{f}{b}\right)$$

Oziroma splošneje za $\forall$b:

$$s(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|b|} S\left(\frac{f}{b}\right)$$

Izreki Fourierjeve transformacije

- Izrek enakosti

Za posebne primere parametra b velja:

$$b = -1 \quad \Rightarrow \quad s(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(-f)$$

Za realne časovne signale pa lahko izraz preoblikujemo v:

$$s(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S^*(f)$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \rightarrow S(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt$$

$$s(t) = \mathrm{Re}\{s(t)\} + j\,\mathrm{Im}\{s(t)\}\big|_{\mathrm{Im}\{s(t)\}=0} \rightarrow s(t) \in \Re$$

$$s(t) = s^*(t)$$

$$S(-f) = S^*(f)$$

Vpliv parametra b na s(t) in S(f)

$$s(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{|b|} S\left(\frac{f}{b}\right)$$

Funkcijo s(bt) s spreminjanjem parametra b širimo/ožimo. Če je b>0 se s(bt) zoži in obratno. Funkcije njegovega realnega in imaginarnega dela oz. modula (absolutne vrednosti amplitudno gostotnega spektra) in argumenta (faznega kota) pa se razširita.
Časovni signal in frekvenčni spekter sta torej na nek način recipročna. Ožji je časovni signal širši je njegov spekter in obratno.

Recipročnost časovnih signalov in pripadajočih amplitudno gostotnih spektrov definira t.i. telekomunikacijski časovni zakon:

Produkt med pasovno širino signala (ki jo ocenimo z amplitudno gostotnim spektrom signala) in časom potrebnim za prenos v signalu (intervalu signala) vsebovane informacijske množine je konstanten.

Izreki Fourierjeve transformacije

- Časovni premik

Če signal *s*(*t*) zakasnimo za neko konstantno vrednost t_0 potem izraz za Fourierjevo transformacijo zapišemo kot:

$$s(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt$$

S substitucijo $t-t_0=\theta$ izraz preoblikujemo v:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\Theta)e^{-j2\pi f(t_0+\Theta)}d\Theta = e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{\infty} s(\Theta)e^{-j2\pi f\Theta}d\Theta$$

Končni izraz za Fourierjevo transformiranko časovno premaknjenega s(t) je torej:

$$\boxed{s(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet S(f)e^{-j2\pi ft_0}}$$

Izreki Fourierjeve transformacije

- Diferenciranje

Če po času odvajamo izraz za inverzno Fourierjevo transformacijo:

$$\frac{d}{dt}s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}[S(f)e^{j2\pi ft}]df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)j2\pi fe^{j2\pi ft}df$$

Lahko iz tega izpeljemo izraz za odvajanje funkcij:

$$\boxed{\frac{d}{dt}s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet j2\pi fS(f)}$$

In splošen izraz za večkratno odvajanje funkcij:

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n}s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (j2\pi f)^n S(f)}$$

Izreki Fourierjeve transformacije

- Izrek simetrije

Izraza za Fourierjev in inverzni Fourierjev integral se razlikujeta zgolj v predznaku argumenta :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \qquad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

Če v izrazu za inverzno Fourierjevo transformacijo uporabimo substitucijo spremenljivke t z –t dobir

$$s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{-j2\pi ft} df$$

Če nadalje zamenjamo formalni spremenljivk t ↔ f dobimo:

$$s(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Izreki Fourierjeve transformacije

- Izrek simetrije

Če primerjamo dobljeni izraz z izrazom za Fourierjevo transformacijo:

$$s(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Lahko zapišemo naslednje relacije:

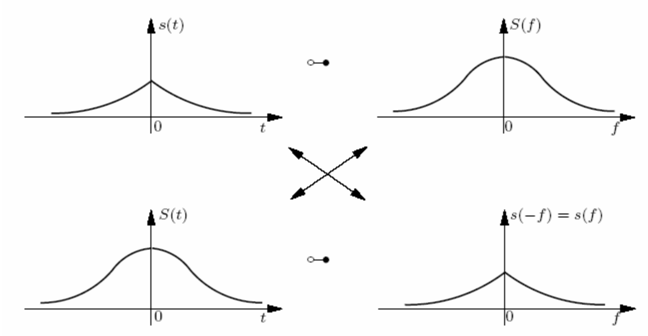
$$s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f), \qquad S(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s(-f)$$

Če uporabimo S(f) signala s(t) kot novo časovno funkcijo *S*(*t*), potem ima Fourierjeva transformiranka časovno zrcaljeno obliko *s*(-f) signala s(t). *S*(*t*) mora biti kompleksna časovna funkcija.

Izreki Fourierjeve transformacije

$$s_s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_s(f) = Re\{S_s(f)\}, \qquad Re\{S_s(t)\} \circ\!\!-\!\!\bullet\ s_s(-f) = s_s(f)$$

Če je *s*(*t*) soda funkcija, potem je tudi njen spekter *S*(*f*) in s tem tudi *S*(*t*) realna in soda funkcija. Podobno mora biti tudi Fourierjeva transformiranka od S(t) realna in soda funkcija:



Izreki Fourierjeve transformacije

- Konvolucija in produkt

Upoštevaje definicijo konvolucijskega produkta lahko za dve poljubni funkciji $s_i(t)$ in $s_j(t)$ zapišemo:

$$s_i(t) * s_j(t) = g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(f) = S_i(f)S_j(f)$$

Z upoštevanjem izreka simetrije lahko nadalje zapišemo:

$$S_i(t)S_j(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ g(-f) = s_i(-f) * s_j(-f)$$

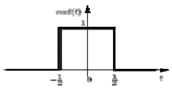
Če sta s1(t) in s2(t) poljubni časovni funkciji lahko za njun konvolucijski produkt zapišemo multiplikacijski izrek (tudi modulacijski izrek):

$$s_1(t)s_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_1(f) * S_2(f)$$

Produktu dveh poljubnih funkcij v časovnem prostoru ustreza konvolucija v frekvenčnem prostoru!

Primeri uporabe teoremov

- Fourierjeva transformacija rect (t)



Če je s(t) = rect(t) in funkcijo vstavimo v Fourierjev integral:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f})$$

S preoblikovanje Eulerjevih obrazcev uporabimo:

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Eulerjeva obrazca

$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$

Dobimo Fourierjevo transformacijo pravokotnega impulza:

$$S(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = si(\pi f)$$

V angl. literaturi je zaslediti tudi sinc (f):

Primeri uporabe teoremov

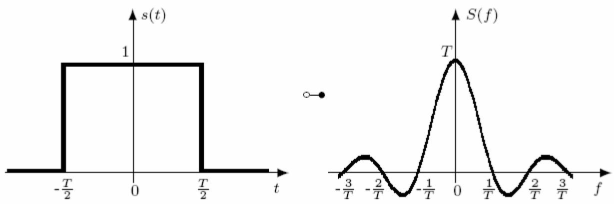
- Fourierjeva transformacija rect (bt)

V simbolni obliki transformacijo zapišemo kot:

$$rect(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ si(\pi f)$$

Z uporabo izreka enakosti lahko izraz preoblikujemo v:

$$s(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|b|} S\left(\frac{f}{b}\right) \rightarrow rect(t/T) \circ\!\!-\!\!\bullet\ T si(\pi T f)$$



Primeri uporabe teoremov

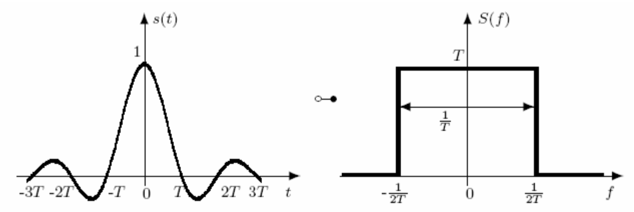
- Fourierjeva transformacija si(πt)

Z uporabo izreka o simetriji lahko zapišemo: rect (t) = s_S(t)

$$s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f), \qquad S(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s(-f) \;\Rightarrow\; si(\pi t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, rect(-f) = rect(f)$$

Z uporabo izreka o enakosti pa preoblikujemo:

$$s(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{|b|} S\left(\frac{f}{b}\right) \;\Rightarrow\; si\left(\pi \frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\, T rect(Tf)$$



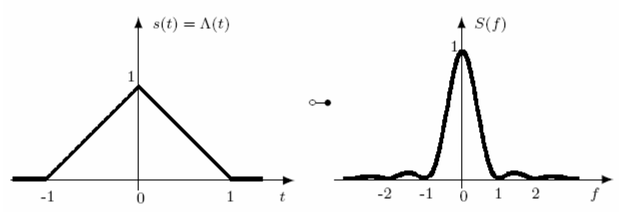
Primeri uporabe teoremov

- Fourierjeva transformacija trikotnega impulza

Trikotni signal predstavlja konvolucijo signala rect(t) s samim seboj:

$$\Lambda(t) = rect(t) * rect(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, si^2(\pi f)$$

Z uporabo konvolucijskega produkta dobimo hkrati obliko signala v frekvenčnem prostoru:



Primeri uporabe teoremov

- Fourierjeva transformacija trikotnega impulza

Če preverimo še obratno – konvolucijski produkt funkcije si(πt) same s seboj:

$$si(\pi t) * si(\pi t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ rect(f) \cdot rect(f) = rect(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ si(\pi t)$$

Če uporabimo še izrek o enakosti lahko izpeljemo splošneje:

$$si\left(\pi \frac{t}{T}\right) * si\left(\pi \frac{t}{T}\right) = |T| si\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

S konvolucijo si funkcije same s seboj dobimo spet si funkcijo! Si funkcija se torej s konvolucijskim produktom reproducira.

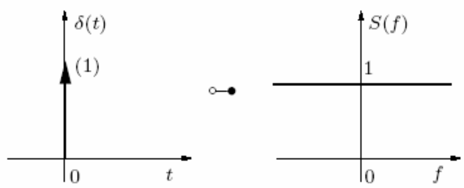
Transformacija singularnih signalnih funkcij

Točke, v katerih je funkcija analitična, imenujemo *regularne*. Če je funkcija analitična na nekem območju z izjemo nekaterih njegovih točk, imenujemo take točke *singularne*.
Analitične funkcije imajo v vseh regularnih točkah odvode poljubnega reda.

Singularne funkcije so tiste, ki jih lahko izpeljemo iz Diracovega impulza z integriranjem oz. odvajanjem poljubnega reda.

Za transformacijo Diracovega impulza smo izpeljali:

$$s(t) = s(t) * \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S(f) = S(f) \cdot \mathfrak{F}\{\delta(t)\} \Rightarrow \mathfrak{F}\{\delta(t)\} = 1 \Rightarrow \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$$



Transformacija Diracovih impulzov

Če za izraz transformacije $\delta(t)$ uporabimo še izrek o simetriji in upoštevamo simetrijo Diracovega impulza nadalje izpeljemo:

$$s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S(f), \qquad S(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s(-f) \ \Rightarrow\ 1 \circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(-f) = \delta(f)$$

Fourierjev spekter enosmernega signala $s(t) = 1$ je Diracov impulz v frekvenčnem prostoru pri $f = 0$.

To spoznanje nam omogoča izpeljavo pomembne relacije za sinusne in kosinusne signale:

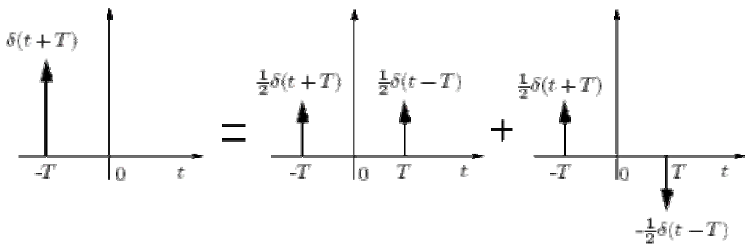
$$\delta(t+T) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{j2\pi Tf} = \cos(2\pi Tf) + j\sin(2\pi Tf)$$

Če razčlenimo časovno premaknjen signal $\delta(t+T)$ na sodo in liho komponento:

$$\tfrac{1}{2}\delta(t-T) + \tfrac{1}{2}\delta(t+T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \cos(2\pi Tf)$$

$$-\tfrac{1}{2}\delta(t-T) + \tfrac{1}{2}\delta(t+T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad j\sin(2\pi Tf)$$

Transformacija Diracovih impulzov



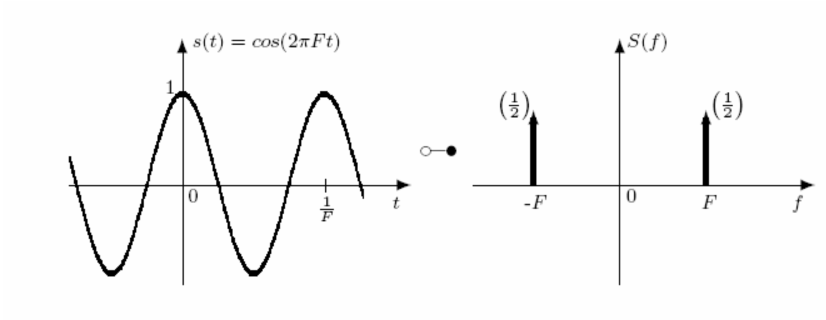
Diracovi impulzni pari imajo torej periodične kosinusne oz. sinusne spektre. Obratno lahko z uporabo izreka o simetriji iz Diracovih impulznih spektrov izpeljemo signale kosinusne in sinusne oblike:

$$\cos(2\pi Tt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{1}{2}\delta(f+T) + \tfrac{1}{2}\delta(f-T)$$
$$j\sin(2\pi Tt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\tfrac{1}{2}\delta(f+T) + \tfrac{1}{2}\delta(f-T)$$

Transformacija Diracovih impulzov

S preureditvijo spremenljivk (T↔F,) dobimo končno transformacijsko enačbo:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \cos(2\pi F t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{1}{2}\delta(f+F)+\frac{1}{2}\delta(f-F) \\ \sin(2\pi F t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{j}{2}\delta(f+F)-\frac{j}{2}\delta(f-F) \end{array}}$$



Transformacija niza Diracovih impulzov

Eno pomembnejših orodij za opis periodičnih signalov, vzorčenja, linijskih spektrov, metod za diskretno Fourierjevo transformacijo itn. je zaporedje Diracovih impulzov in njegova Fourierjeva transformacija.

Zaporedje ekvidistančno razmaknjenih Diracovih impulzov in Fourierjeva transformacija tega zaporedja, z enotino periodo impulzov (1) je definirano z naslednjim izrazom:

Uporabimo izrek o premiku in superpoziciji:

$$s(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet S(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\sum_i a_i s_i(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_i a_i S_i(f)$$

Ter izpeljemo:

$$\boxed{\text{III}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f}}$$

Transformacija niza Diracovih impulzov

Vsoto:

$$\text{III}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nf}$$

lahko preoblikujemo, če vlak Diracovih impulzov razčlenimo v pare impulzov, ter člen δ(0) in za vsakega ločeno izvedemo transformacijo:

$$\delta(t+T) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{j2\pi Tf} = \cos(2\pi Tf) + j\sin(2\pi Tf)$$

$$\delta(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-j2\pi nf} = \cos(2\pi Tf) - j\sin(2\pi Tf)$$

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1$$

$$\Downarrow$$

$$\text{III}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nf)$$

Transformacija niza Diracovih impulzov

Nadalje lahko izpeljemo:

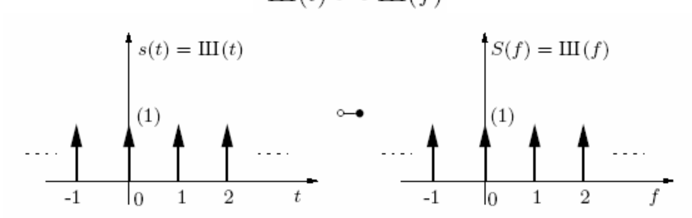
$$\boxed{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nf) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)}$$

In dobimo preprost izraz:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)}$$

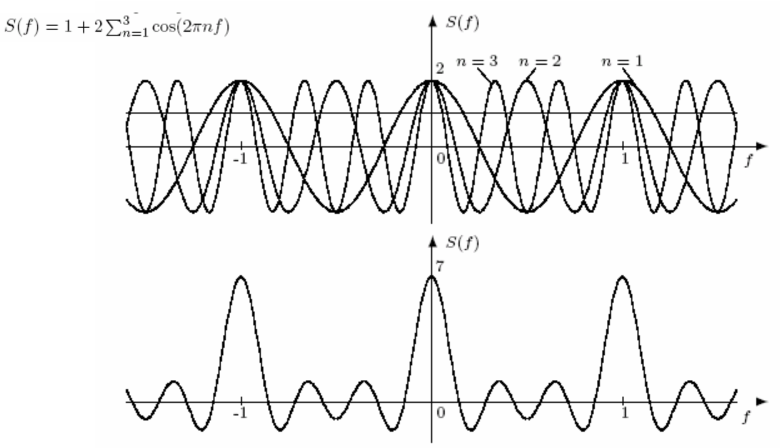
oz. v simbolni obliki:

$$\text{III}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \text{III}(f)$$



Aproksimacija niza impulzov δ(t)

$$Ш(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n f)$$



Razširjen vlak Diracovih impulzov

Izhajajoč iz:

$$Ш(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \qquad \text{perioda } T=1$$

in z uporabo izreka enakosti in transformirake vlaka impulzov:

$$s(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{|b|} S\left(\frac{f}{b}\right) \qquad Ш(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Ш(f)$$

lahko za razširjen vlak impulzov zapišemo:

$$\boxed{Ш\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\, |T|Ш(Tf)}$$

Razširjen vlak Diracovih impulzov

Izhajamo iz definicije niza Diracovih impulzov:

$$\text{Ш}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \xrightarrow{\text{z vpeljavo t = t/T:}} \text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

Uporabimo izrek razširitve Diracovih impulzov:

$$\delta(bt) = \frac{1}{|b|}\delta(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right) = |T| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)}$$

Podobno izpeljemo za:

$$\boxed{\text{Ш}(Tf) = \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)}$$

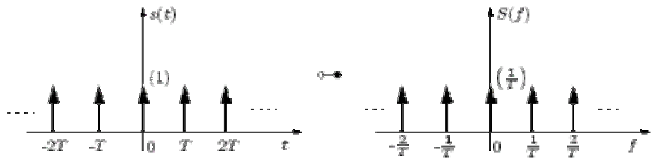
Razširjen vlak Diracovih impulzov

Izhajajoč iz izraza: $\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ |T|\,\text{Ш}(Tf)$

lahko preoblikujemo:

$$\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right) = |T| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad \text{Ш}(Tf) = \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



Transformacija stopnične funkcije

Spekter $S_\varepsilon(f)$ stopnične funkcije $\varepsilon(t)$ dobimo s pomočjo diferencialnega izreka:

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t)$$

Relacija velja tudi, če $\varepsilon(t)$ premaknemo za poljuben konstantni faktor $K \in \Re$:

$$\frac{d}{dt}[\varepsilon(t) + K] = \delta(t)$$

Z uporabo izreka o diferenciranju lahko izpeljemo spekter odvoda $\varepsilon(t)$:

$$\frac{d}{dt}s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ j2\pi f S(f)$$

$$\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_\varepsilon(f) \quad \Rightarrow \quad j2\pi f S_\varepsilon(f) = 1$$

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$$

Transformacija stopnične funkcije

Ker pa v splošnem ne smemo zapisati, da je $S_\varepsilon(f) = (j2\pi f)^{-1}$, ker smo pri odvajanju "izgubili" enosmerno komponento K, pravilneje zapišemo:

$$S_\varepsilon(f) = \frac{1}{j2\pi f} + c\delta(f) \qquad 1 \circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(-f) = \delta(f)$$

Pri določitvi konstante c si pomagamo z:

$$\begin{array}{ccccc} s(t) & = & s_s(t) & + & s_l(t) \\ \circ\!\!\mid & & \circ\!\!\mid & & \circ\!\!\mid \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ S(f) & = & Re\{S(f)\} & + & jIm\{S(f)\} \end{array} \qquad s_s(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s(-t)$$

tako lahko zapišemo za $Re\{S\varepsilon(f)\}$:

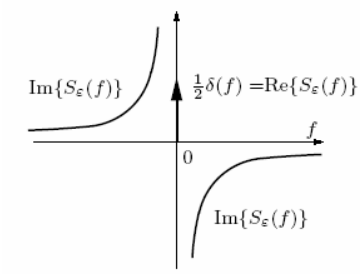
$$c\delta(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{2}\varepsilon(t) + \frac{1}{2}\varepsilon(-t) = \frac{1}{2}$$

Transformacija stopnične funkcije

V končni obliki lahko spekter stopnične funkcije zapišemo kot:

$$\boxed{S_\varepsilon(f) = \frac{1}{2}\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f}}$$

ki hkrati predstavlja prenosno funkcijo idealnega integratorja.



Fourierjeva in Laplaceova transformacija

Za obstoj Fourierjeve transformacije poljubne s(t) niso znani vsi pogoji. V splošnem je dovolj, če je izpolnjen pogoj za absolutno integrabilnost funkcije:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|dt < \infty$$

Zgornji pogoj izpolnjujejo številni energijski signali kot tudi impulzni odzivi stabilnih sistemov. Če dopustimo v spektralnih funkcijah pole, $\delta(t)$ ali $\delta(t)$ višjega reda potem zgornji pogoj ni izpolnjen!

Obstoj Fourierjeve transformacije za zgoraj navedene izjeme izpolnjuje modificiran izraz za integrabilnost funkcije:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|e^{-b|t|}dt < \infty \qquad b > 0$$

Fourierjeva in Laplaceova transformacija

Tako so signali ustrezni za transformacijsko enačbo, hkrati pa s poljubno frekvenco ne morejo eksponentno naraščati.
Mnogi problemi, ki smo jih do sedaj reševali izključno z Laplaceovo transformacijo, so rešljivi tudi s Fourierjevo transformacijo.

Transformirana funkcija po Fourierju je kot funkcija realne spremenljivke frekvence fizikalno preglednejša, lažje merljiva.

Pri Laplaceovi transformaciji je pogoj za absolutno integrabilnost izpolnjen za množico signalov z dodatno eksponencialno utežjo $e^{-\sigma t}$ ($\sigma \in \Re$).
Fourierjeva transformacija tako utežene funkcije je:

$$e^{-\sigma t}s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-\sigma t}e^{-j2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-(\sigma + j2\pi f)t}dt$$

Fourierjeva in Laplaceova transformacija

Če vpeljemo novo spremenljivko $p = \sigma + j2\pi f$, dobimo (dvostransko) Laplaceovo transformirano funkcijo:

$$S(p) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-pt}dt$$

Za kavzalne signale opisuje zgornji izraz tudi enostransko Laplaceovo transformacijo.
Dvodimenzionalni Laplaceov spekter moremo upodobiti v p ravnini.
Laplaceova transformacija je posebno primerna za oceno analitičnih lastnosti frekvenčnih funkcij. Prav tako uporabljamo lego njenih ničel in polov v ravnini p za analizo, sintezo in ocene stabilnosti posameznih funkcij.