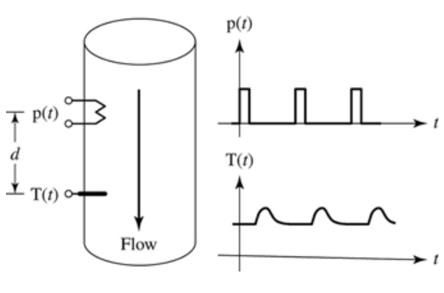
SIGNALI

Korelacijske funkcije deterministočnih signalov

Uvod

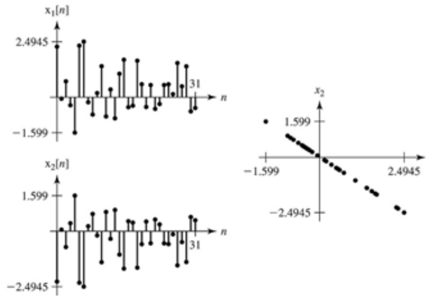
Koncept korelacije (soodvisnosti) je temeljnega pomena za komunikacijsko tehniko. V vseh korelacijskih postopkih iščemo mero za podobnost dveh signalov. Na primerjavah enakosti - podobnosti zgradimo pomembne postopke za sprejemanje signalov, metode za analizo in sintezo signalov.



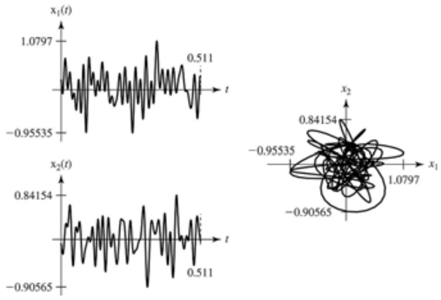
Uvod

Zanima nas predvsem korelacijska funkcija determinističnih realnih signalov in to v povezavi s konvolucijo in Fourierjevo transformacijo.

Definicija korelacije je v tesni povezavi z energijo, močjo signalov in njenim izračunom pri filtriranih signalih.



Primer koreliranih diskretnih signalov



Primer nekoreliranih zveznih signalov

Energija in moč signala

Če na upor R priključimo napetost $u(t)$ potem izračunamo el. energijo E, ki se v časovnem intervalu (t1,t2) na R pretvori v toplotno energijo:

$$E_{el} = \frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt$$

Lahko zapišemo tudi:

$$E_{el} = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\cdot i(t)\,dt = \frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)\,dt = R\int_{t_1}^{t_2} i^2(t)\,dt$$

Energija signala je torej proporcionalna integralu kvadrata časovne funkcije (npr. $u^2(t)$, $i^2(t)$).

Energija signala in energijski signali

<u>Definicija</u>:

Energija (matematično) časovno zveznega signala nedefinirane fizikalne veličine s(t) je določena z:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt \qquad oz. \qquad \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\,dt$$

Če s(t) ni definirana vzdolž celotne časovne osi, potem določimo integral “per partes” - za vsak posamezen odsek na katerem je s(t) definiran.

Obe različici izrazov za energijo signala podajata isto številčno vrednost, če s(t) normiramo na U_{REF}= 1V in če znaša R=1Ω.

Kdaj je s(t) energijski signal?

Energija signala in energijski signali

<u>Definicija</u>:

s(t) je energijski signal, če izpolnjuje naslednjo neenačbo:

$$0 < E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt < \infty$$

Signal s(t) je energijski, če je njegova skupna (celotna) energija vzdolž časovne osi končna.

Veliko signalov ne izpolnjuje zgornjega pogoja npr. vsi periodični signali, stopnična funkcija, Diracov impulz, eksponenti impulz, enosmerni signali, naključni časovno neomejeni signali.

Za omenjeno množico signalov lahko definiramo poprečno (srednjo vrednost) moč signala (ki je končna) iz poprečne (srednje) vrednosti energije signalov v omejenem časovnem intervalu 2T.

Poprečna moč signala in močnostni signali

V splošnem izračunamo poprečno moč signala s(t) na intervalu (-T, T):

$$P_{el} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)\cdot i(t)\,dt \longrightarrow P_{el} = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u^2(t)\,dt \longrightarrow P_{el} = R\cdot\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i^2(t)\,dt$$

<u>Definicija</u>:

Poprečna moč (matematično) časovno zveznega signala s(t) nedefinirane fizikalne veličine je določena z:

$$\boxed{P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t)\,dt}$$

s(t) je močnostni signal, če izpolnjuje naslednji pogoj:

$$\boxed{0 < P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t)\,dt < \infty}$$

Impulznokorelacijske funkcije energijskih signalov

Izhodišče za definicijo podobnosti med dvema realnima signaloma *s*(*t*) in *g*(*t*) je njuna razlika:

$$\Delta(t) = s(t) - g(t)$$

Če sta *s*(*t*) in *g*(*t*) energijska signala, potem je tudi njuna razlika Δ(*t*) energijski signal. Kvadrat razlike energij signalov lahko uporabimo kot eno od mer odstopanja:

$$E_\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - g(t)]^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t)dt$$

Mero za odstopanje lahko posplošimo na poljubne signale z normiranjem. Neodvisnost od absolutne amplitude oz. energije obeh primerljivih signalov zagotovimo, da energiji signalov normiramo. Energijama E_s in E_g priredimo vrednost 1 in velja:

$$E_S = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = 1 \rightarrow E_{S_b} = \frac{1}{E_s}\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = 1 \rightarrow s_b(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{E_s}} \rightarrow E_{S_b} = \int_{-\infty}^{\infty} {s_b}^2(t)dt = 1$$

Impulznokorelacijske funkcije energijskih signalov

Z vpeljavo spremenljivk:

$$s_b(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{E_s}} \qquad g_b(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{E_g}}$$

Lahko izraz za E_Δ preoblikujemo v normirano obliko:

$$E_{\Delta b} = \frac{1}{\sqrt{E_s E_g}} E_\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [s_b(t) - s_g(t)]^2 \, dt = 2 - 2\frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t)dt}{\sqrt{E_s E_g}}$$

Z vpeljanim normiranim merilom odstopanja definiramo mero soodvisnosti kot normirani korelacijski koeficient za energijske signale:

$$\boxed{p_{sg}^E = 1 - \frac{E_{\Delta b}}{2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t)dt}{\sqrt{E_s E_g}}} \qquad p_{sg}^E = 1 \quad \text{za} \quad s(t) = g(t)$$

Definicijsko območje p_{sg}

Normiran korelacijski koeficient podaja soodvisnost (podobnost) dveh energijskih signalov *s*(*t*) in *g*(*t*) v intervalu med [-1,1]:

$$-1 \le p_{sg}(t) \le 1$$

p^E_{sg} zavzame vrednost 1 v primeru največje podobnosti oz. enakosti med signaloma in hkrati tudi v primeru, ko se signala razlikujeta za nek pozitiven in realen faktor k:

$$s(t) = k \cdot g(t) \rightarrow p_{sg}(t) = 1; \quad k > 0, realen$$

Vrednost -1 zavzame v primeru največje različnosti med signaloma in tudi v primeru, ko se signala razlikujeta za nek pozitiven in realen faktor k:

$$s(t) = -g(t) \rightarrow p_{sg}(t) = -1$$
$$s(t) = k \cdot -g(t) \rightarrow p_{sg}(t) = -1; \quad k > 0, realen$$

Ortogonalni signali

Če je izpolnjen pogoj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t)dt = 0 \quad \longrightarrow \quad p_{sg}^{E} = 0$$

Signale, katerih normirani avtokorelacijski koeficient je enak 0 imenujemo ORTOGONALNE.

Pri definiciji korelacijskih koeficientov smo za primerjavo signalov med seboj vzeli isto izhodišče signalov glede na časovno os. Če signale med seboj na časovni osi premaknemo, se spremeni tudi vrednost korelacijskega koeficienta.

Časovno zamaknjeni signali

Odvisnost korelacijskega koeficienta od časovnega zamika med signaloma opišemo z normirano korelacijsko funkcijo (t.i. impulzno korelacijsko funkcijo).

Za soodvisnost (podobnost) med energijskima signaloma signalom $s(t)$ in premaknjenim $g(t + \tau)$ velja naslednji izraz za normirano korelacijska funkcijo):

$$\boxed{p_{sg}^{E}(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt}{\sqrt{E_s E_g}}}$$

Če velja relacija $s(t) = kg(t)$, preimenujemo izraz za normirano korelacijsko funkcijo v normirano avtokorelacijsko funkcijo $p^{E}_{ss}(\tau)$. V primeru dveh različnih funkcij, če $s(t) \neq kg(t)$, pa tudi normirana križno korelacijska funkcija.

Korelacijski in konvolucijski produkt

Izraz v števcu križno korelacijske funkcije:

$$p_{sg}^{E}(\tau) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt}{\sqrt{E_s E_g}}$$

predstavlja <u>nenormirano korelacijsko funkcijo</u>, ki jo opišemo samo z izrazom <u>korelacijska funkcija</u> tudi <u>impulzna korelacijska funkcija</u> ki jo zapišemo kot:

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt.$$

Izraz za impulzno korelacijsko funkcijo je podoben izrazu za konvolucijski integral:

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad g(t) = s(t) * h(t)$$

Korelacijski in konvolucijski produkt

Podobno kot smo za konvolucijski integral vpeljali pojem konvolucijskega produkta, bomo uvedli pojem korelacijskega produkta za korelacijsko funkcijo v simbolni obliki:

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = s(\tau) \star g(\tau)$$

Ali zapisano v obliki integrala:

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt.$$

povezavo med konvolucijskim in korelacijskim produktom lahko izpeljemo s pomočjo substitucije spremenljivk (t=-Θ):

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = \int\limits_{+\infty}^{-\infty} s(-\Theta)g(\tau-\Theta)(-d\Theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(-\Theta)g(\tau-\Theta)d\Theta$$

Korelacijski in konvolucijski produkt

Dobljeni izraz:
$$\int_{-\infty}^{\infty} s(-\Theta)g(\tau-\Theta)d\Theta$$

predstavlja konvolucijski integral, ki ga simbolno zapišemo v obliki:

$$\boxed{s(\tau) \star g(\tau) = s(-\tau) * g(\tau)}$$

Izpeljemo lahko tudi obratno:

$$s(\tau) * g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(\tau - t)dt, \qquad t = -\theta$$

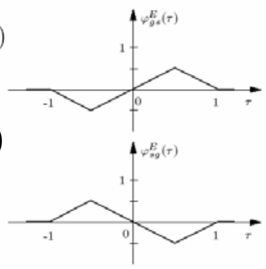
$$\int_{\infty}^{-\infty} s(-\theta)g(\theta+\tau)(-d\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-\theta)g(\theta+\tau)d\theta = s(-\tau) \star g(\tau)$$

$$\boxed{s(\tau) * g(\tau) = s(-\tau) \star g(\tau)}$$

Korelacijski in konvolucijski produkt

Z izpeljanim želimo ugotoviti relacijo med izrazoma za korelacijska produkta φ^E_{sg} in φ^E_{gs} :

$$\varphi^E_{sg}(\tau) = s(\tau) \star g(\tau) = s(-\tau) * g(\tau)$$



z uporabo izreka o komutativnosti:

$$\varphi^E{}_{sg}(\tau) = s(-\tau) * g(\tau) = g(\tau) * s(-\tau)$$

in relacije:

$$s(\tau) * g(\tau) = s(-\tau) \star g(\tau)$$

dobimo za križnokorelacijsko funkcijo $\varphi^E_{gs}(\tau)$:

$$\boxed{\varphi^E_{sg}(\tau) = g(-\tau) \star s(-\tau) = \varphi^E_{gs}(-\tau)}$$

Križno korelacijski funkciji $\varphi^E_{sg}(\tau)$ in $\varphi^E_{gs}(\tau)$ sta med seboj časovno zrcaljeni!

Korelacijski in konvolucijski produkt

Iz relacije φ^E_{sg} in φ^E_{gs} :

$$\varphi^E_{sg}(\tau) = g(-\tau) \star s(-\tau) = \varphi^E_{gs}(-\tau)$$

je razvidno, da korelacijski produkt ni komutativen kot tudi ni asociativen. Je pa distributiven na seštevanje.

Zaradi omenjenih lastnosti je pretvorba korelacijskega integrala v konvolucijskega še kako smotrna. Konvolucijski integral namreč ni omejen na energijske signale. Pogoj za uporabo korelacijskega integrala je torej integrabilnost izraza:

$$\varphi^E_{sg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt.$$

Tako lahko izračunamo tudi impulzne korelacijske funkcije Diracovih signalov, kot tudi križno korelacijske funkcije energijskih in močnostnih signalov. V splošnem pa korelacijski integral ne konvergira vedno, če sta *s*(*t*) in *g*(*t*) močnostna signala.

Lastnosti korelacijskega produkta

Korelacijski produkt bomo uporabili na primeru izračuna avtokorelacijske funkcije pravokotnega impulza:

$$\varphi^E_{ss}(\tau) = rect(\tau) \star rect(\tau) = rect(-\tau) * rect(\tau)$$

ker je rect(t) soda funkcija:

$$rect(-\tau) = rect(\tau)$$

lahko izraz za φ^E_{ss} preoblikujemo:

$$\varphi^E_{ss}(\tau) = rect(\tau) * rect(\tau) = \Lambda(\tau)$$

iz izračuna lahko izpeljemo splošne lastnosti impulzno korelacijske funkcije:

a) φ^E_{ss} je vedno soda funkcija: $\varphi^E_{ss}(\tau) = \varphi^E_{ss}(-\tau)$

b) največjo vrednost zavzame funkcija φ^E_{ss} pri τ=0 (prekrivanje funkcij).

Lastnosti korelacijskega produkta

Za energijska signala s(t) = g(t) lahko izraz za korelacijsko funkcijo v trenutku τ=0 preoblikujemo:

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt. \longrightarrow \varphi_{ss}^{E}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E$$

Maksimalna vrednost avtokorelacijske funkcije energijskega signala predstavlja energijo signala. Definirali smo:

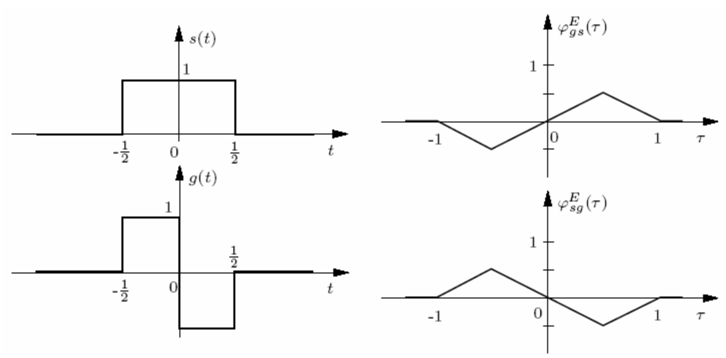
$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt}$$

Za normirano avtokorelacijsko funkcijo torej velja:

$$p^{E}{}_{sg}(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt}{\sqrt{E_s E_g}} \longrightarrow p^{E}{}_{ss}(0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt}{E_s} = 1$$

Lastnosti korelacijskega produkta

c) <u>Avtokorelacijska funkcija časovno omejenih signalov ima dvakratno širino časovno omejenega signala</u> :



Fourierjeva transformacija impulzno avtokorelacijskih funkcij

S pomočjo Fourierjevega integrala lahko korelacijskim funkcijam priredimo spektralne funkcije. Pri tem zavzame spremenljivka τ vlogo spremenljivke t.
Z uporabo izrekov za konvolucijo in časovnega zrcaljenja:

$$s_i(t) * s_j(t) = g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(f) = S_i(f) S_j(f) \qquad s(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S^*(f)$$

lahko iz avtokorelacijske funkcije za realne signale in relacijo $z \cdot z^* = |z|^2$ izpeljemo izraz za spektralno gostoto energije:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{ss}^{E}(\tau) & = & s(-\tau) * s(\tau) \\ & & \quad \Big\downarrow \qquad \Big\downarrow \\ & & S^*(f) \cdot S(f) = |S(f)|^2 \end{array}$$

Wiener-Khinitchinov teorem

Fourierjeva transformiranka avtokorelacijske funkcije energijskega signala je enaka kvadratu absolutnih vrednosti Fourierjeve transfomiranke signala s(τ).

Energijsko gostotni spekter

Impulzno korelacijska funkcija φ^E_{ss} predstavlja energijo signala v časovnem prostoru, njena Fourierjeva transformiranka pa distribucijo energije signala v frekvenčnem prostoru.

$\vert S(f)\vert^2$ zato tudi označujemo kot spektralno gostoto energije oz. energijsko gostotni spekter signala s(τ).

Energijsko gostotni spekter je zaradi kvadrata absolutne vrednosti Fourierjeve transformiranke vedno soda in realna funkcija brez negativnih funkcijskih vrednosti.

Če vstavimo izraz za spektralno gostoto energije signala v izraz za inverzno Fourierjevo transformacijo dobimo:

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

Parsevalov teorem

Impulzno korelacijsko funkcijo φ^{E}_{ss} lahko izračunamo samo iz modula (absolutne amplitudne vrednosti) spektra Fourierjeve transformiranke s(t) in je neodvisna od argumenta (faznega poteka) amplitudno gostotnega spektra.

Iz izraza za inverzno Fourierjevo transformacijo amplitudno gostotnega spektra lahko določimo energijo signala:

$$\varphi_{ss}^{E}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E \qquad E = \varphi_{ss}^{E}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

Dobljena relacija predstavlja znani PARSEVALOV teorem:

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}$$

Parsevalov teorem

S Parsevalovim teoremom lahko ocenimo energijo signala tudi v frekvenčnem področju iz same vrednosti amplitudno gostotnega spektra.

Če sta npr. $s_1(t)$ in $s_2(t)$ realni funkciji velja Parsevalov izrek tudi v naslednji obliki:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f)S_2^*(f)df}$$

$$S_1(f)*S_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\theta)S_2(f-\theta)d\theta\Big|_{f=0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\theta)S_2(-\theta)d\theta, \qquad S_2(-\theta) = S_2^*(\theta) \text{ za sode funkcije}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\theta)S_2^*(\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f)S_2^*(f)df$$

Impulzno korelacijske funkcije in LTI sistemi

Najprej primerjajmo relacijo med avtokorelacijsko funkcijo izhodnega signala $g(t)$ in avtokorelacijsko funkcijo vhodnega signala $s(t)$ poljubnega LTI sistema, katerega impulzni odziv je $h(t)$. Za avtokorelacijsko funkcijo izhodnega signala velja:

$$\varphi_{gg}^{E}(\tau) = g(\tau) \star g(\tau) = g(-\tau) * g(\tau)$$

Če v avtokorelacijski funkciji izhodnega signala nadomestimo $g(-\tau)$ in $g(\tau)$ s konvolucijskim produktom vhodnega signala in impulznega odziva $g(\tau) = s(\tau) * h(\tau)$, dobimo:

$$\varphi_{gg}^{E}(\tau) = s(-\tau) * h(-\tau) * s(\tau) * h(\tau)$$

Z uporabo izreka asociativnosti in komutativnosti konvolucije ter izraza za korelacijski produkt:

$$s(\tau) \star g(\tau) = s(-\tau) * g(\tau)$$

Izraz Wiener-Lee

izpeljemo znani Wiener-Lee izraz za relacijo impulznokorelacijskih funkcij φ^{E}_{ss} in φ^{E}_{hh} :

$$\begin{aligned}\varphi_{gg}^{E}(\tau) &= s(-\tau) * h(-\tau) * s(\tau) * h(\tau) \\ &= s(-\tau) * s(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)\end{aligned}$$

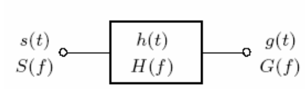
$$\boxed{\varphi_{gg}^{E}(\tau) = \varphi_{ss}^{E}(\tau) * \varphi_{hh}^{E}(\tau)}$$

Z vpeljavo Wiener-Khintchin-ovega teorema izpeljemo relacijo med energijsko gostotnimi spektri:

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = s(-\tau) * s(\tau)$$

$$S^{*}(f) \cdot S(f) = |S(f)|^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{|G(f)|^2 = |S(f)|^2 \cdot |H(f)|^2}$$

Impulzno korelacijske funkcije in LTI sistemi



$$
\begin{array}{ccccl}
S(f) \cdot H(f) & = & G(f) & & \text{Amplitudnogostotni spekter} \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \\
s(t) * h(t) & = & g(t) & & \text{Signalne funkcije} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\varphi_{ss}^{E}(\tau) * \varphi_{hh}^{E}(\tau) & = & \varphi_{gg}^{E}(\tau) & & \text{Avtokorelacijske funkcije} \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \\
|S(f)|^2 \cdot |H(f)|^2 & = & |G(f)|^2 & & \text{Energijski gostotni spektri}
\end{array}
$$

$\varphi^{E}_{hh}(\tau)$ in $|H(f)|^2$ ne obstaja za poljubne LTI sisteme, npr. za sisteme katerih impulzni odziv je močnostni signal!

Impulznokorelacijske funkcije časovno diskretnih signalov

Koncept impulznokorelacijske funkcije lahko prenesemo tudi v časovno diskreten prostor. Če izračunamo križno korelacijsko funkcijo dveh frekvenčno omejenih realnih energijskih signalov iz njihovih otipkov, sledi iz relacije:

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = s(\tau) \star g(\tau) = s(-\tau) * g(\tau)$$

pri vpeljavi vzorčene oblike zapisa signalov in uporabe izraza za diskretno konvolucijo, izpeljava diskretne impulznokorelacijske funkcije:

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t - nT) \qquad g(nT) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)h([n-m]T)$$

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = s(-\tau) * g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t+\tau)dt$$

Podobno kot smo zamenjali spremenljivki t in τ, to storimo z n in m

$$\boxed{\varphi_{sg}^{E}(mT) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)g([n+m]T)}$$

Impulznokorelacijske funkcije časovno diskretnih signalov

Impulznokorelacijsko funkcijo vpeljemo z $s(nT) = g(nT)$ in tako dobimo za $m = 0$ energijo signala $s(t)$ iz otipanih vrednosti:

$$E = \varphi_{ss}^{E}(0) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^{2}(nT)$$

Če še poenostavimo in izberemo T=1, potem lahko tudi $\varphi^{E}_{sg}(\tau)$ preoblikujemo v:

$$\varphi_{sg}^{E}(mT) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)g([n+m]T)$$

$$\varphi_{sg}^{E}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)g(n+m) = s(-m) * g(m)$$

in tako tudi energijo časovno diskretnega realnega signala v:

$$\boxed{E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^{2}(n)}$$

Energija diskretnih signalov

Energijo časovno diskretnega signala lahko torej izračunamo iz vsote kvadratov njegovih vzorčenih vrednosti.

Izhajajoč iz Fourierjeve transformiranke konvolucijskega produkta diskretnih signalov in impulznokorelacijske funkcije:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{ss}^{E}(\tau) & = & s(-\tau) * s(\tau) \\ \Big\updownarrow & & \Big\updownarrow \quad \Big\updownarrow \\ \Theta_{ss}^{E}(f) & = & S^{*}(f) \cdot S(f) = |S(f)|^{2} \end{array}$$

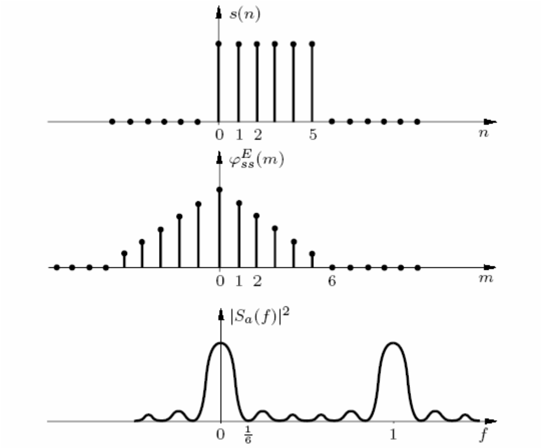
lahko zapišemo izraz za Wiener-Khintchinov teorem tudi za diskretne signale:

$$\boxed{\varphi_{ss}^{E}(m) \circ\!\!-\!\!\bullet\, |S_{a}(f)|^{2}}$$

Energijsko gostotni spekter $|S_a(f)|^2$ je zaradi poenostavitve T=1 periodičen s periodo 1.

Energija diskretnih signalov

Podobno kot za časovno zvezne signale lahko tudi za časovno diskretne signale njihovo energijo izračunamo iz energijsko gostotnega spektra.



Impulznokorelacijske funkcije časovno diskretnih signalov

Zaradi periodičnosti frekvenčno zveznega spektra časovno diskretnega signala φ^{E}_{ss} (m) je energija signala enaka površini energijskega gostotnega spektra v eni sami periodi. Parsevalov izrek laho potem zapišemo v naslednji obliki:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |S_a(f)|^2 df$$

Ustrezno velja Wiener-Leejeva enačba tudi za prenos diskretnega signala s(n) skozi časovno diskreten sistem, katerega kvadrat impulznega odziva, ki nastopa v impulznoavtokorelacijski funkciji, je sešteven:

$$\varphi_{gg}^{E}(\tau) = \varphi_{ss}^{E}(\tau) * \varphi_{hh}^{E}(\tau) \quad \longrightarrow \quad \varphi_{gg}^{E}(m) = \varphi_{ss}^{E}(m) * \varphi_{hh}^{E}(m)$$

Impulznokorelacijske funkcije časovno diskretnih signalov

Periodično konvolucijo (aditivnost, komutativnost, distributivnost) lahko uporabimo tudi pri korelaciji signalov.

Če med seboj koreliramo dva časovno diskretna signala s(n) in g(n), omejena na $n \leq M$ otipkov in korelacijski produkt $\varphi^E_{sg}(m)$ ponavljamo s periodo M, potem lahko podobno kot smo to izpeljali za konvolucijski produkt časovno omejenih signalov s(n) in g(n), storimo to tudi za korelacijsko funkcijo $\varphi^E_{sg_d}(m)$, ki je zaradi diskretnih časovno omejenih signalov periodična. Izračunamo jo lahko (podobno kot za periodično konvolucijo) neposredno iz priodično se, s periodo M, ponavljajočih signalov $s_d(n)$ in $g_d(n)$:

$$\boxed{\varphi^E_{sgd}(m) = \sum_{n=0}^{M-1} s_d(n) g_d(n+m), \quad \text{za} \quad m = 0, \ldots, M-1}$$

Z uporabo konvolucijskega teorema DFT lahko periodično korelacijsko funkcijo izračunamo tudi v frekvenčnem prostoru

$$\varphi^E_{sgd}(m) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S^*_d(k) \cdot G_d(k)$$