SIGNALI

Laplaceova transformacija (CT)
Z transformacija (DT)

Laplaceova transformacija

- Najpomembnejše orodje pri analizi časovno zveznih signalov in sistemov.
- Koncept analize temelji na dekompoziciji signalov v vsoto kompleksnih eksponentnih funkcij od katerih je vsaka t.i. lastna (eigen) funkcija sistema.
- Izhod sistema za lastne funkcije določimo relativno preprosto.
- Z razširitvijo vhodnega nabora signalov iz lastnih funkcij na poljubne signale sestavljene iz členov K·e^{st} kjer je s kompleksna funkcija sestavljena iz Im in Re dela (σ+j2)

Dvosmerna Laplaceova transformacija

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}dt$$

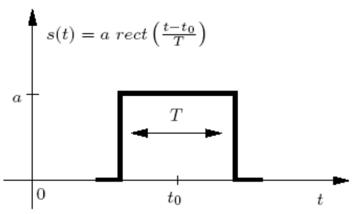
Inverzna Laplaceova transformacija
(se ne uporablja)

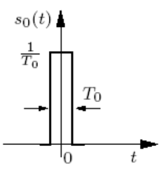
$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\cdot e^{st}ds$$

- Laplaceova transformacija lahko dvostranska ali enostranska
- Enostranska Laplaceova transformacija za kavzalne signale – praktično za vse realne signale (ε(t))
- Razlika v transformacijskih obrazcih

Aproksimacija na osnovi površine impulza, podobno kot izpeljano v poglavju 1.

F





$$s(t) \approx s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0)s_0(t-nT_0)T_0$$

Laplaceova transformacija

Za obstoj Fourierjeve transformacije poljubne s(t) niso znani vsi pogoji. V splošnem je dovolj, če je izpolnjen pogoj za absolutno integrabilnost funkcije:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

Zgornji pogoj izpolnjujejo številni energijski signali kot tudi impulzni odzivi stabilnih sistemov. Če dopustimo v spektralnih funkcijah pole, δ(t) ali δ(t) višjega reda potem zgornji pogoj ni izpolnjen!

Obstoj Fourierjeve transformacije za zgoraj navedene izjeme izpolnjuje modificiran izraz za integrabilnost funkcije:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| e^{-b|t|} dt < \infty \qquad b > 0$$

Laplaceova transformacija

Tako so signali ustrezni za transformacijsko enačbo, hkrati pa s poljubno frekvenco ne morejo eksponentno naraščati.
Mnogi problemi, ki smo jih do sedaj reševali izključno z Laplaceovo transformacijo, so rešljivi tudi s Fourierjevo transformacijo.

Transformirana funkcija po Fourierju je kot funkcija realne spremenljivke frekvence fizikalno preglednejša, lažje merljiva.

Pri Laplaceovi transformaciji je pogoj za absolutno integrabilnost izpolnjen za množico signalov z dodatno eksponencialno utežjo $e^{-\sigma t}$ ($\sigma \in \Re$).
Fourierjeva transformacija tako utežene funkcije je:

$$e^{-\sigma t} s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-(\sigma + j2\pi f)t} dt$$

Laplaceova transformacija

Če vpeljemo novo spremenljivko $s = \sigma + j2\pi f$, dobimo (dvostransko) Laplaceovo transformirano funkcijo:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Za kavzalne signale opisuje zgornji izraz tudi enostransko Laplaceovo transformacijo.

Dvodimenzionalni Laplaceov spekter moremo upodobiti v s-ravnini (p-ravnina).

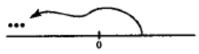
Laplaceova transformacija je posebno primerna za oceno analitičnih lastnosti frekvenčnih funkcij. Prav tako uporabljamo lego njenih ničel in polov v s-ravnini (p-ravnina) za analizo, sintezo in ocene stabilnosti posameznih funkcij.

Laplaceova transformacija

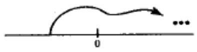
Konvergenčno področje (ROC)

- Kovergenčno področje funkcije je področje na katerem funkcija obstaja – za Laplaceov transform je to integral funkcije
- Ugotavljanje ROC
  - Določiti je potrebno tip signala
  - Določiti je potrebno pole funkcije (poli funkcije so tiste vrednosti s v imenovalcu za katere zavzame imenovalec vrednost nič)
- Tipi signalov

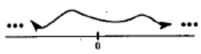
Levostranski signali
(omejen z desne do $-\infty$)



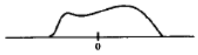
Desnostranski signali
(omejen z leve do $+\infty$)



Dvostranski signali
(od $-\infty$ do $+\infty$)



Časovno omejeni signali
(na časovni osi omejeni z leve in desne)



Laplaceova transformacija

Pravila za ugotavljanje ROC

- Konvergenčno območje
  - Je območje s-ravnine levo-desno od vertikalnih linij (polov) ali znotraj njih
  - Območje nikoli ne vključuje polov funkcije
  - Če je x(t) levostranska funkcija potem je konvergenčno področje levo od najmanjšega pola; Re{s} > a
  - Če je x(t) desnostranska funkcija potem je konvergenčno področje desno od največjega pola; Re{s} < a
  - Če je x(t) dvostranska funkcija potem je konvergenčno področje znotraj polov; a < Re{s} < b
  - Če je x(t) časovno omejena funkcija potem je konvergenčno področje cela s-ravnina

Laplaceova transformacija

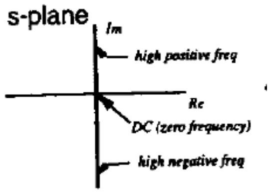
Ocena konvergenčnega področja

Example If $x(t) = e^{2t}u(t)$, find $X(s)$ and its ROC.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}e^{-st}u(t)dt = \int_{0}^{\infty} e^{(2-s)t}dt = \frac{1}{2-s}e^{(2-s)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-2}$$

only possible if (2-$Re\{s\}$) in exponent < 0

$\Rightarrow$ ROC is $Re\{s\}>2$



Laplaceova transformacija

Tipične preslikave

	Property/Theorem	*Time Domain*	*Complex Frequency Domain*
1	Linearity	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + \ldots + c_n F_n(s)$
2	Time Shifting	$f(t-a)u_0(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
3	Frequency Shifting	$e^{-as}f(t)$	$F(s+a)$
4	Time Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
5	Time Differentiation See also (2.18) through (2.20)	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s) - f(0^-)$
6	Frequency Differentiation See also (2.22)	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
7	Time Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f(0^-)}{s}$
8	Frequency Integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} F(s)ds$
9	Time Periodicity	$f(t+nT)$	$\frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-sT}}$
10	Initial Value Theorem	$\lim_{t \to 0} f(t)$	$\lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0^-)$
11	Final Value Theorem	$\lim_{t \to \infty} f(t)$	$\lim_{s \to 0} sF(s) = f(\infty)$
12	Time Convolution	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
13	Frequency Convolution	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$

Laplaceova transformacija

Preslikave tipičnih elementarnih signalov

	$f(t)$	$F(s)$
1	$u_0(t)$	$1/s$
2	$t u_0(t)$	$1/s^2$
3	$t^n u_0(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\delta(t)$	1
5	$\delta(t-a)$	e^{-as}
6	$e^{-at} u_0(t)$	$\frac{1}{s+a}$
7	$t^n e^{-at} u_0(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\sin \omega t \, u_0(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$\cos \omega t \, u_0(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
10	$e^{-at} \sin \omega t \, u_0(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
11	$e^{-at} \cos \omega t \, u_0(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Laplaceova transformacija

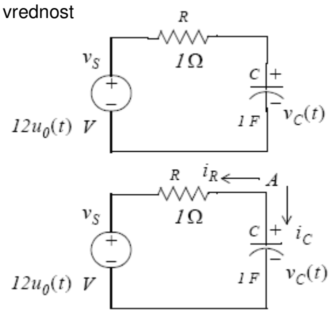
Primer

- Potrebno je določiti potek napetosti na kondenzatorju $v_c(t)$:

$v_C(0^-) = 6\ V.$

začetna vrednost

kavzalen vhodni signal



$$i_R + i_C = 0$$

$$\frac{v_C(t) - 12u_0(t)}{1} + 1 \cdot \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = 12u_0(t)$$

$$sV_C(s) - v_C(0^-) + V_C(s) = \frac{12}{s}$$

$$(s+1)V_C(s) = \frac{12}{s} + 6$$

$$V_C(s) = \frac{6s+12}{s(s+1)}$$

$$V_C(s) = \frac{6s+12}{s(s+1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{(s+1)}$$

$$r_1 = \left.\frac{6s+12}{(s+1)}\right|_{s=0} = 12$$

$$r_2 = \left.\frac{6s+12}{s}\right|_{s=-1} = -6$$

$$V_C(s) = \frac{12}{s} - \frac{6}{s+1} \Leftrightarrow 12 - 6e^{-t} = (12 - 6e^{-t})u_0(t) = v_C(t)$$