SIGNALI

Nizkoprepustni in pasovnoprepustni sistemi

Uvod

V teoriji sistemov obravnavamo lastnosti idealnih LTI sistemov zaradi lažjega pristopa k analizi lastnosti realnih sistemov.
V nadaljevanju bomo zato obravnavali predvsem pomembnejše idealizirane LTI sisteme:

- sisteme brez popačitev,
- nizkopasovne sisteme (lowpass) in
- pasovnoprepustne sisteme (bandpass).

Obravnavali bomo lastnosti naštetih sistemov tako v časovnem kot tudi v frekvenčnem prostoru.

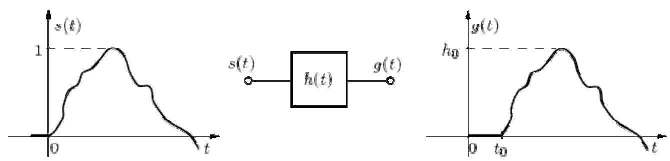
LTI sistem brez popačitev

Sistem je brez popačitev, če vhodni signal *s*(*t*) in izhodni signal *g*(*t*) zadostita enačbi:

$$g(t) = h_0 s(t - t_0) = s(t) * [h_0 \delta(t - t_0)]$$

h_0 in t_0 realni konstanti

Če izvzamemo spremembo faktorja amplitude h_0 (slabljenje/ojačenje) in faktor časovnega zamika t_0 je naš sistem brez popačitev. <u>Če se oblika vhodnega signala s (t) verno prenese na izhod sistema g(t) = h_0 s(t-t_0), govorimo o sistemu brez popačitev</u>.

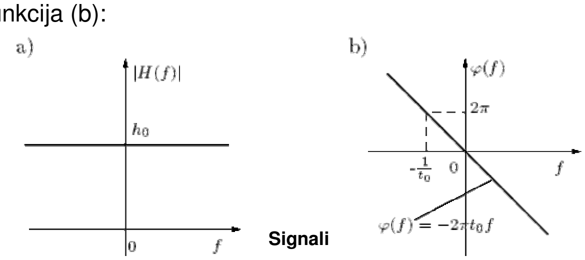


LTI sistem brez popačitev

Impulzni odziv sistema *h*(*t*), ki je brez popačitev ter njegovo prenosno funkcijo *H*(*f*) lahko zapišemo kot:

$$\boxed{\begin{aligned} h(t) &= h_0 \delta(t - t_0) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \\ H(f) &= h_0 e^{-j2\pi t_o f} \end{aligned}}$$

Potek absolutne vrednosti prenosne funkcije |*H*(*f*)| in potek faznega kota φ(*f*) = $-2\pi f t_0$ za idealen LTI sistem (brez popačitev) je konstanta (a) oz. linearno padajoča funkcija (b):



LTI sistem brez popačitev

LTI sistemi katerih prenosna karakteristika ni idealna, signalov ne prenašajo verno glede na vhodno vzbujanje – imenujemo jih tudi LTI sistemi s t.i. linearnimi popačitvami.
Sistem pri katerem je prenosna funkcija $|H(f)|$ = konstanta pri poljubnem poteku faznega kota je t.i. vseprepustni sistem (prepustni filter za vse frekvence).

Razen absolutne vrednosti amplitude in poteka faznega kota (realnega in imaginarnega dela prenosne funkcije) se za opisovanje lastnosti LTI sistemov uporabljajo še:

a) Faktor slabljenja

$$\begin{aligned} a(f) &= -20 log|H(f)| \quad \text{dB (Decibel)} \\ a(f) &= -ln|H(f)| \quad \text{Np (Neper)} \end{aligned}$$

b) Faktor kota

$$b(f) = -\varphi(f)$$

LTI sistem brez popačitev

in:

c) Fazna hitrost

$$\tau_f(f) = \frac{b(f)}{2\pi f}$$

d) Skupinska hitrost

$$\tau_s(f) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}b(f)$$

Sistem brez popačitev vse frekvence vsebovane v časovnem signalu slabi s konstantno vrednostjo (slabljenje za celotno frekvenčno področje je konstantno). Prav tako sta konstantni t.i. fazna in skupinska hitrost ($t_0 = \tau_f = \tau_s$):

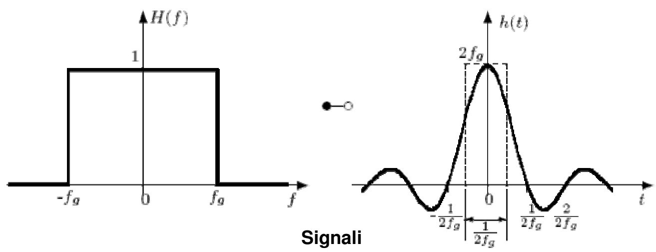
Nizkoprepustni sistemi

Idealni nizkoprepustni sistemi (NPS)

Prenosna funkcija in impulzni odziv

Idealni nizkoprepustni sistem z mejno frekvenco f_g ima prenosno funkcijo, ki izpolnjuje pogoj sistema brez popačitev znotraj območja, ki ga omejuje mejna frekvenca f_g.

To področje imenujemo prepustno področje, nad to frekvenco pa je zaporno področje znotraj katerega je prenosna (karakteristika) funkcija enaka 0.



Nizkoprepustni sistemi

Idealni nizkoprepustni sistemi (NPS)

Če izvzamemo zakasnitev (časovni premik odziva sistema na vzbujanje) je idealna prenosna funkcija za nizkoprepustni sistem:

$$\boxed{\begin{aligned} H(f) &= rect\left(\frac{f}{2f_g}\right) \\ &\updownarrow \\ h(t) &= 2f_g si(2\pi f_g t) \end{aligned}} \qquad \varphi(f) = 0\ \{\mathrm{Im} = 0\}$$

Iz poteka impulznega odziva sklepamo, da se idealni nizkoprepustni sistem obnaša kot nekavzalni sistem (sistem, ki ga v praksi ne moremo realizirati).

Zakaj?

Impulzni odziv sistema (na vzbujanje z $\delta(t)$) v trenutku t=0 obstaja tudi pri negativnih časovnih vrednosti (torej v II. kvadrantu).

Nizkoprepustni sistemi

Idealni nizkoprepustni sistemi (NPS)

Idealnemu nizkoprepustnemu sistemu se lahko približamo s pravilno izbiro faznega poteka. Faznemu kotu priredimo namesto prvotnega poteka za idealne NPS (φ=0) linearno naraščajočo funkcijo:

$$\varphi(f) = 2\pi f t_0$$

Zakaj?
S pravilno izbiro faznega poteka smo energijo nekavzalnega dela impulznega odziva h(t) zmanjšali saj smo h(t) za nek čas t_0 premaknili v desno.

Za h(t) lahko potem izpeljemo:

$$h(t) = 2 f_g \frac{\sin 2\pi f_g (t - t_0)}{2\pi f_g (t - t_0)}$$

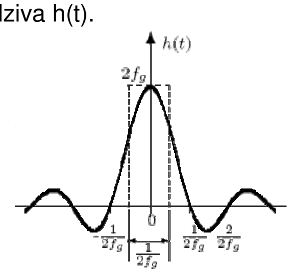
Nizkoprepustni sistemi

Idealni nizkoprepustni sistemi (NPS)

Navkljub nekavzalnosti idealnega NPS lahko v kontekstu sistemske teorije izpeljemo relacije pomembne za obravnavo realnih nizkoprepustnih sistemov. Posebej bomo izpostavili lastnosti trajanja in prenihaja impulznega odziva.

Trajanje impulznega odziva t_m
Čas trajanja *impulznega odziva* h(t) *določa ena od stranic* pravokotnika, katerega dimenzija je določena z največjo amplitudo impulznega odziva (*hmax)* in površino, ki je enaka površini impulznega odziva h(t).

$$\boxed{t_m = \frac{1}{h_{max}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = H(0)/h_{max}}$$



Nizkoprepustni sistemi

Idealni nizkoprepustni sistemi (NPS)

Trajanje impulznega odziva za idealni nizkoprepustni sistem lahko izpeljemo iz produkta stranic pravokotnika, če poznamo njegovo površino:

$$t_m \cdot h_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = H(0) \rightarrow t_m = \frac{H(0)}{h_{\max}}$$

Za idealni nizkoprepustni sistem torej velja:

$$\boxed{t_m = \frac{1}{2f_g}}$$

Nizkoprepustni sistemi

Idealni nizkoprepustni sistemi (NPS)

Trajanje impulznega odziva idealnega NPS je obratno proporcionalno pasovni širini NPS:

$$\boxed{f_g \cdot t_m = \frac{1}{2}}$$

V splošnem velja za poljubni NPS, da je produkt mejne frekvence NPS in trajanja impulznega odziva konstanten:

$$\boxed{f_g \cdot t_m = konst.}$$

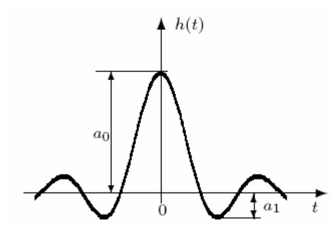
Zgornji izraz podaja relacijo med pasovno širino sistema in trajanjem impulznega odziva, ki hkrati ne moreta biti poljubno majhna – sta namreč obratno sorazmerna. Podobno smo izpeljali tudi pri teoremu podobnosti:

$$s(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|b|} S\left(\frac{f}{b}\right)$$

Nizkoprepustni sistemi

Idealni nizkoprepustni sistemi (NPS)

Prenihaj impulznega odziva NPS p_δ
Kot mero prenihaja h(t) uporabimo kvocient amplitude prvega prenihaja h(t), a_1 in maksimuma h(t), a_0 - ti. **prenosno razmerje**.



Prenosno razmerje idealnega nizkoprepustnega sistema je:

$$\boxed{p_\delta = \left|\frac{a_1}{a_0}\right| \approx 22\%}$$

Prenosno razmerje oz. prenihaj idealnega NPS je neodvisen od mejne frekvence f_g!

Nizkoprepustni sistemi

Stopnični odziv idealnega NPS

Za idealni nizkoprepustni sistem je odziv $h_\varepsilon(t)$ na stopnično funkcijo:

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} 2f_g si(2\pi f_g \tau)d\tau \\ &= 2f_g \left[\int_{-\infty}^{0} si(2\pi f_g \tau)d\tau + \int_{0}^{t} si(2\pi f_g \tau)d\tau \right] \end{aligned}$$

Neelementarni integral

Če vpeljemo v izraz t.i. Integralno sinusno funkcijo:

$$Si(x) = \int_0^x si(\xi)d\xi$$

In upoštevamo lastnosti funkcije:

Lihost funkcije

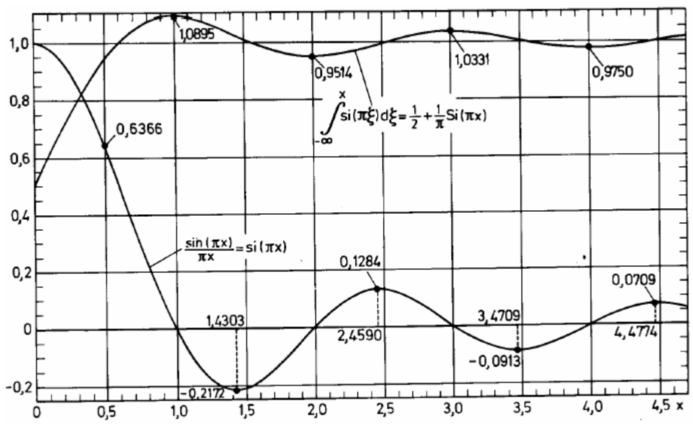
$$Si(-x) = -Si(x)$$

Vrednosti funkcije v mejnih vrednostih

$$Si(\infty) = \pi/2$$

Nizkoprepustni sistemi

funkcija si(x) in integralna funkcija Si(x)



Nizkoprepustni sistemi

Stopnični odziv idealnega NPS

Za stopnični odziv $h_\varepsilon(t)$ idelanega NPS lahko z vpeljavo Si(x) in upoštevanjem lihosti funkcije ter robnih pogojev izpeljemo:

$$h_\varepsilon(t) = 2f_g\left[\frac{1}{4f_g} + \frac{1}{2\pi f_g}Si(2\pi f_g t)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}Si(2\pi f_g t)$$