Formule za 1. kolokvij iz verjetnosti

Kombinatorika

- *permutacija brez ponavljanja* je urejen razpored dolžine n, ki vsebuje n različnih elementov. Število permutacij je $n!$.
- *permutacija s ponavljanjem* je urejen razpored dolžine n, ki vsebuje k različnih elementov, vsakega $n_1, n_2, ..., n_k$, kjer je $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. Število le-teh je $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$.
- *variacija brez ponavljanja* je urejen razpored dolžine k iz množice z n elementi. Število variacij je $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- *variacija s ponavljanjem* je urejen razpored dolžine k iz množice z n elementi, ki se lahko ponavljajo. Število le-teh je n^k.
- *kombinacija brez ponavljanja* je neurejena izbira k elementov iz množice z n elementi. Število kombinacij je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$.
- *kombinacija s ponavljanjem* je neurejena izbira k elementov iz množice z n elementi, ki se lahko ponavljajo. Število le-teh je $\binom{n+k-1}{k}$.

Elementarna verjetnost

Naj ima poskus n možnih izidov izmed katerih naj bo m število ugodnih izidov za dogodek A. Če so vsi izidi enakoverjetni, velja

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{število ugodnih izidov}}{\text{število vseh izidov}}.$$

Geometrijska verjetnost

$$P(A) = \frac{\text{mera ugodnih izidov}}{\text{mera vseh izidov}},$$

pri tem je mera lahko dolžina, ploščina, prostornina ...

Nekatere formule:

- N-nemogoč, G-gotov, $\bar{A}$-nasproten dogodek

$$P(N) = 0, \quad P(G) = 1, \quad P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$$

- A, B sta nezdružljiva dogodka, če velja $AB = N$, potem je $A \cup B = A + B$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- $P(AB) = P(A)\, P(B|A) = P(B)\, P(A|B)$
- *Bernoullijeva formula.* Če izvedemo n neodvisnih poskusov, od katerih vsak uspe z verjetnostjo p, je verjetnost, da uspe natanko k poskusov, enaka $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Dogodka A in B sta neodvisna, če velja $P(AB) = P(A)\, P(B)$ oz. $P(A|B) = P(A)$.
- Če $H_1, H_2, ..., H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov (vedno se zgodi natanko eden izmed njih), velja *izrek o popolni verjetnosti*

$$P(A) = P(H_1)\, P(A|H_1) + P(H_2)\, P(A|H_2) + ... + P(H_n)\, P(A|H_n)$$

in *Bayesov obrazec*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\, P(A|H_i)}{P(H_1)\, P(A|H_1) + P(H_2)\, P(A|H_2) + ... + P(H_n)\, P(A|H_n)}.$$

Diskretne slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka X je diskretna, če je njena zaloga števna množica $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$. Porazdelitev slučajne spremenljivke X opišemo

- z verjetnostno funkcijo:
$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}, \quad p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1,$$
kjer je $P[X = x_n] = p_n$ za $n = 1, 2, 3, ...$
- s porazdelitveno funkcijo:
$$F_X(x) = P[X < x] = \sum_{x_i < x} p_i,$$
kjer velja $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, in $P[X = x_0] = \lim_{x\downarrow x_0} F_X(x) - F_X(x_0)$.

Matematično upanje diskretne spremenljivke X je
$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots .$$

Disperzija diskretne spremenljivke X je
$$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \sum_n p_n x_n - \sum_n p_n x_n^2.$$

Rodovna funkcija nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke X je
$$G_X(t) = \sum_n p_n t^n,$$
kjer je $p_n = P[X = n]$ za $n = 0, 1, 2, ...$Pri tem velja
$$E(X) = G'_X(1) \quad \text{in} \quad D(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 .$$

Iz rodovne funkcije dobimo verjetnostno z razvojem v Taylorjevo vrsto
$$G_X(t) = \sum_n p_n t^n = \sum_n \frac{G'_X(0)}{n!} t^n.$$

Nekatere vrste in porazdelitve:

- binomska formula $(x+y)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$,
- končna geometrijska vrsta $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$,
- geometrijska vrsta $1+x+x^2+...+x^n+... = \frac{1}{1-x}$ in njen odvod $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+... = \frac{1}{(1-x)^2}$,
- binomska porazdelitev $b(n,p)$ s parametroma $n \in \mathbb{N}$ in $p \in (0,1)$:
$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p, \quad k = 0, 1, ..., n,$$
$$E(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad G_X(t) = (pt + q)^n ,$$
- geometrijska porazdelitev s parametrom $p \in (0,1)$:
$$P[X = k] = pq^{k-1}, \quad q = 1 - p, \quad k = 1, 2, ..., n, ...$$
$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}, \quad G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}.$$