Formule za 2. kolokvij iz verjetnosti

Slučajna spremenljivka X je **diskretna**, če je njena zaloga števna množica $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$. Porazdelitev slučajne spremenljivke X opišemo

- z verjetnostno funkcijo:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}, \quad p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1,$$

  kjer je $P[X = x_n] = p_n$ za $n = 1, 2, 3, ...$

- s porazdelitveno funkcijo:

$$F_X(x) = P[X < x] = \sum_{x_i < x} p_i,$$

  kjer velja $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, in $P[X = x_0] = \lim_{x\downarrow x_0} F_X(x) - F_X(x_0)$.

Slučajna spremenljivka X je **zvezna**, če je njena porazdelitvena funkcija $F_X(x) = P[X < x]$ zvezna funkcija. Porazdelitev slučajne spremenljivke X opišemo z gostoto verjetnosti p_X, to je nenegativna realna funkcija, za katero velja

$$\int_{\mathbb{R}} p(x)\, dx = 1.$$

Pri tem velja

$$F_X(x) = P[X < x] = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt \quad \text{in} \quad F'_X(x) = p_X(x),$$

$$P[a < X < b] = \int_a^b p(x)\, dx = F_X(b) - F_X(a).$$

Začetni moment reda n slučajne spremenljivke X je $z_n = E(X^n)$ in ga izračunamo v diskretnem oziroma zveznem primeru kot

$$z_n = \sum_k p_k x_k^n \quad \text{oziroma} \quad z_n = \int_{\mathbb{R}} x^n p(x)\, dx.$$

Pri tem je $z_1 = E(X)$ **matematično upanje** slučajne spremenljivke X.
Centralni moment reda n slučajne spremenljivke X je

$$m_n = E\left((X - E(X))^n\right).$$

Pri tem je $m_2 = D(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ **disperzija** slučajne spremenljivke X in se izračuna kot

$$D(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = z_2 - z_1^2.$$

Asimetrija slučajne spremenljivke X je definirana z

$$A(X) = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}},$$

kjer upoštevamo zvezo $m_3 = z_3 - 3z_2z_1 + 2z_1^3$.
Kvartil reda i (za $i = 1, 2, 3$) q_i je pri zvezni slučajni spremenljivki X definiran s predpisom

$$F_X(q_i) = \frac{i}{4}.$$

Pri tem je $m = q_2$ **mediana** in $s = (q_3 - q_1)/2$ **semiinterkvartilni razmik**.

Zvezna slučajna spremenljivka X je porazdeljena **normalno** $\mathcal{N}(a,\sigma)$ z matematičnim upanje a in standardnim odklonom σ, če je njena gostota

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Standardizirana normalna porazdelitev $\mathcal{N}(0,1)$ ima gostoto

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

in porazdelitveno funkcijo

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x), \quad \text{kjer je} \quad \Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Za aproksimacijo binomske porazdelitve $X \sim b(n,p)$ uporabimo:

- Poissonov obrazec oziroma Laplaceovo lokalno formulo:

$$P[X=k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \quad \text{oz.} \quad P[X=k] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

- Laplaceovo integralsko formulo

$$P[a<X<b] = P\left[\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < X^* < \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right] = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Diskretni slučajni vektor (X,Y) ima diskretno zalogo vrednosti $\{(x_i,y_j)\,|i=1,2,..n; j=1,2,...,m\}$ v $\mathbb{R}^2$. Njegovo porazdelitev praviloma podamo z verjetnostno tabelo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n.}$
	$q_{.1}$	$q_{.2}$	$\cdots$	$q_{.m}$	

,

pri tem je

$$p_{ij} = P[(X,Y) = (x_i,y_j)], \quad p_{i.} = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad q_{.j} = \sum_{i=1}^n p_{ij}, \quad \sum_{j=1}^m \sum_{1=1}^n p_{ij} = \sum_{i=1}^n p_{i.} = \sum_{j=1}^m q_{.j} = 1.$$

- Robna porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix}$$

- Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni če za vse i in j velja

$$p_{ij} = P[(X,Y) = (x_i,y_j)] = P[X=x_i]\,P[Y=y_j] = p_i q_j$$

Zvezni slučajni vektor (X,Y) je podan z gostoto $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, to je nenegativno realno funkcijo dveh spremenljivk, za katero velja

$$\iint_{\mathbb{R}^2} p(x,y)\,dxdy = 1.$$

Pri tem velja

$$P[(X,Y) \in D] = \iint_D p(x,y)\,dxdy.$$

- Robna porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)\,dy \quad \text{in} \quad p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)\,dx.$$

- Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni če velja $p(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y)$.