Binomska slučajna spremenljivka

V nekem poskusu naj ima dogodek A verjetnost p.

Poskus ponovimo n-krat in j-ti ponovitvi priredimo slučajno spremenljivko na sledeč način

spremenljivka naj ima vrednost 1 ,če se A zgodi in vrednost 0, če se A ne zgodi, kar pomeni, da je slučajna spremenljivka porazdeljena po zakonu

$$t_j : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$$

$$p + q = 1.$$

Slučajna spremenljivka $\xi = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \ldots + \mathbf{t}_\mathbf{n}$ **ima natanko toliko členov 1, kolikor je ponovitev, v katerih se zgodi dogodek A**

Slučajna spremenljivka ξ **pravimo, da je porazdeljena binomsko.**

Binomsko porazdelitev simbolično pišemo B(p,n)

Porazdelitveni zakon zanjo zapišemo :

$$\xi \;\square\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \ldots k \ldots n \\ p_0 & p_1 & p_2 \ldots p_k \ldots p_n \end{pmatrix}$$

kjer so verjetnosti določene z formulo

$$p(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Matematično upanje **izračunamo po obrazcu**

$$M(\xi) = n \cdot p$$

Varianco **pa po obrazcu**

$$V(\xi) = n \cdot p \cdot q$$

ter **standardni odklon**

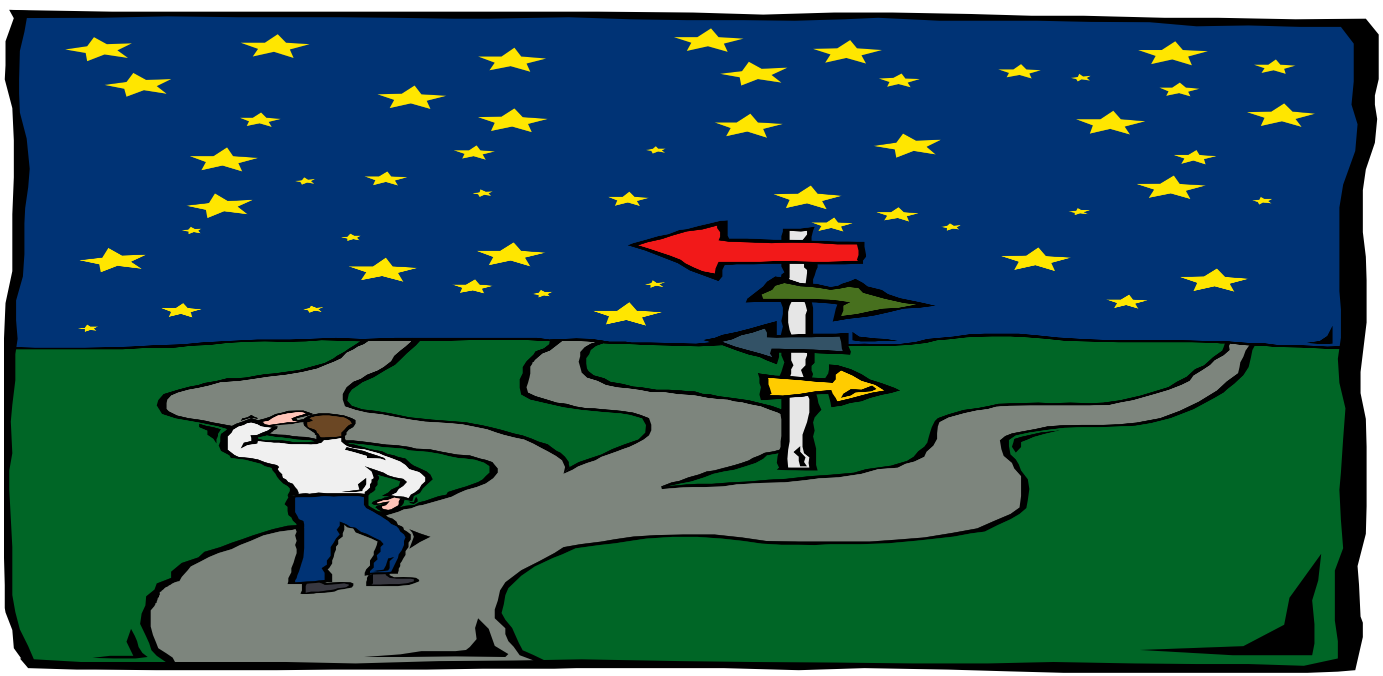
$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Negativna binomska slučajna spremenljivka

Dogodek A naj ima verjetnost p

Denimo, da moramo poskus ponoviti k-krat, da bo nastopil dogodek A natanko r-krat

Očitno potem velja,da je k=r,r+1,r+2,...



Slučajna spremenljivka definirana na množici

r,r+1,r+2,...

je porazdeljena po negativni binomski porazdelitvi z verjetnostmi

$$p(\xi = k) = \binom{k-1}{k-r} . p^r . q^{k-r}$$

in je q = 1 - p .

Matematično upanje negativne binomske slučajne spremenljivke izračunamo

$$M(\xi) = \frac{r}{p}$$

Varianca in standardni odklon pa sta

$$V(\xi) = \frac{rq}{p^2}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{rq}}{p}$$

Za r=1 se negativna binomska slučajna spremenljivka imenuje geometrična slučajna spremenljivka.

Poissonova slučajna spremenljivka

Slučajna spremenljivka je porazdeljena po Poissonovi porazdelitvi, če je definirana na množici

$$\xi \,\square\, \{0,1,2,\ldots k,\ldots\}$$

z verjetnostmi

$$\mathbf{p}(\xi = \mathbf{k}) = \frac{\lambda^{\mathbf{k}} \mathbf{e}^{-\lambda}}{\mathbf{k}!}$$

k=0,1,2,3,.... , $\lambda \in$ R

Poissonova porazdelitev izhaja iz binomske.

Če pustimo v binomski, da gre $n \to \infty$ in obenem $p \to 0$ tako, da je n.p = (konstanta).

Matematično upanje slučajne spremenljivke porazdeljene po Poissonovi porazdelitvi je

$$M(\xi) = \lambda$$

in varianca

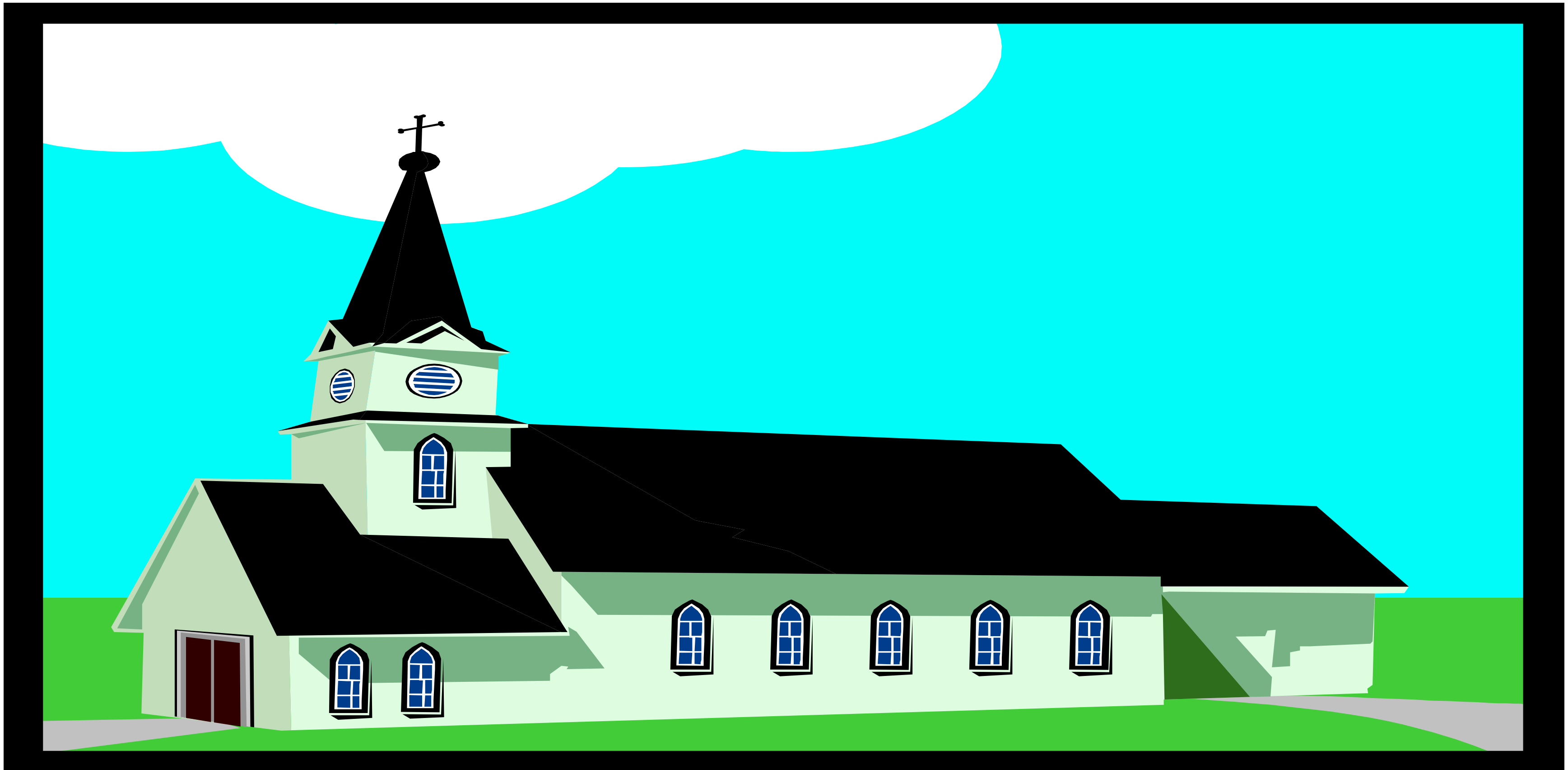
$$V(\xi) = \lambda$$

ter standardni odklon

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\lambda}$$

Med dvema zaporednima verjetnostima velja zveza :

$$p(\xi = k) = p(\xi = k\text{-}1)\frac{\lambda}{k}$$



ZVEZNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Slučajna spremenljivka definirana na intervalu$(-\infty\ ,\infty)$ realnih števil ,je zvezno porazdeljena, če je njeno porazdelitveno funkcijo mogoče izraziti v obliki :

$$\mathbf{P}(\xi \leq \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{t})\mathbf{dt}$$

Funkcija p(t) v integralu se imenuje

gostota verjetnosti

in je povsod nenegativna funkcija, ker je F(x) naraščajoča funkcija.

Za gostoto verjetnosti zaradi
$F(\infty)=1$ in $F(-\infty) = 0$ velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p(x)dx} = 1$$

Matematično upanje

zvezne slučajne spremenljivke je

$$\mathbf{M}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x.p(x)dx}$$

Varianca zvezne slučajne spremenljivke je

$$\mathbf{V}(\xi) = \sigma^2(\xi) = \mathbf{M}[\xi - \mathbf{M}(\xi)]^2 = \mathbf{M}(\xi^2) - \mathbf{M}^2(\xi)$$

pri tem je

$$\mathbf{M}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^2 . \mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{dx}$$

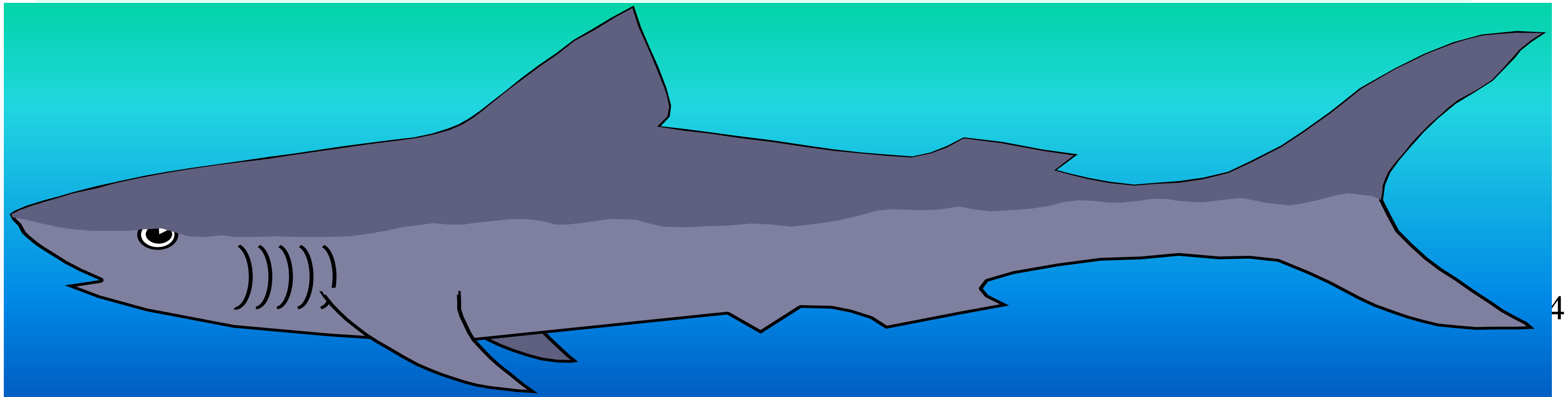
Standardni odklon pa je

$$\sigma(\xi) = \sqrt{V(\xi)}$$

Enakomerna zvezna slučajna spremenljivka

Slučajna spremenljivka je enakomerno porazdeljena na končnem intervalu [a,b], če je njena gostota

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{b-a}} & \text{a} \le x \le \text{b} \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$



Za števili u in v za kateri velja odnos a u v b, zaradi lastnosti porazdelitvene funkcije velja :

$$\mathbf{P}(u \le \xi \le v) = \frac{1}{b-a}\int_u^v dx = \frac{v-u}{b-a}$$

Matematično upanje enakomerno porazdeljene slučajne spremenljivke je :

$$\mathbf{M}(\xi) = \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}\,\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$$

Varianca enakomerno porazdeljene slučajne spremenljivke je

$$V(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Standardni odklon pa je kvadratni koren variance

$$\sigma(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Normalna ali Gaussova slučajna spremenljivka

Zvezna slučajna spremenljivka definirana na intervalu $(-\infty, \infty)$ realnih števil, je normalno poradeljena, če je njena gostota funkcija

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Porazdelitev je odvisna od parametrov μ in σ. Parameter μ je lahko poljubno realno število, parameter σ pa je lahko le pozitivno realno število.

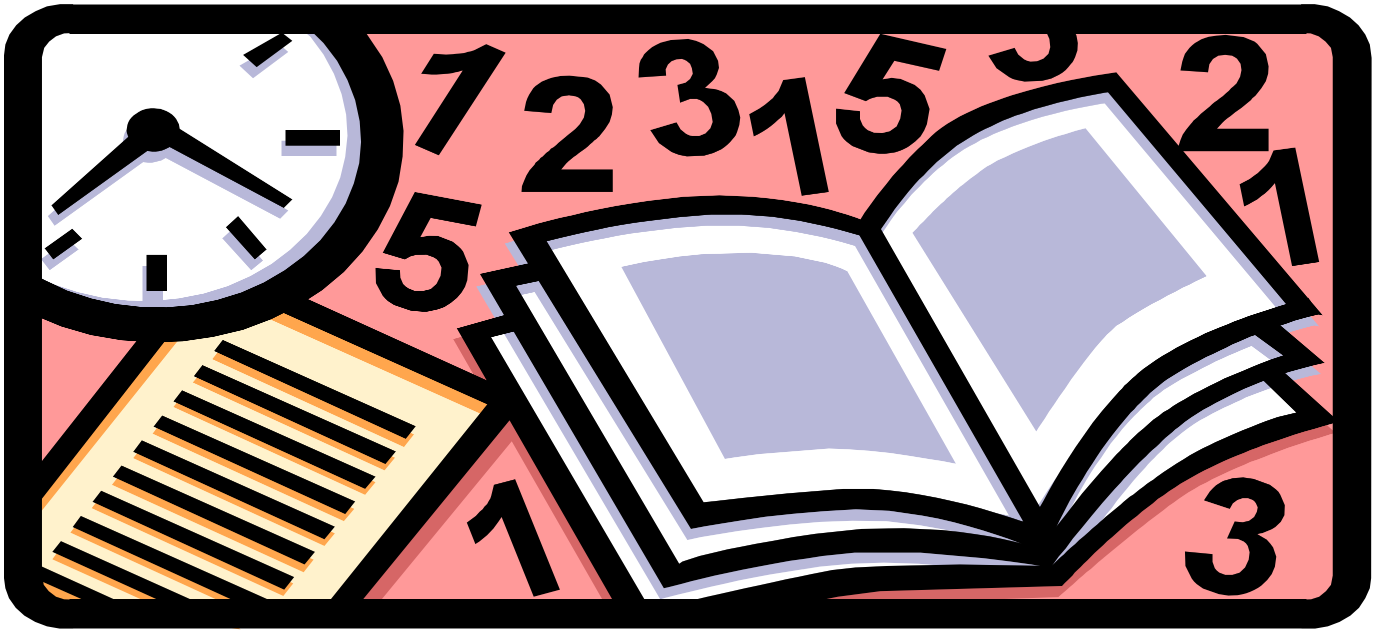
Normalno porazdelitev simbolično zapišemo $N(\mu, \sigma)$

Matematično upanje normalno porazdeljene slučajne spremenljivke je parameter μ.

Varianca normalne slučajne spremenljivke je σ^2

Za slučajno spremenljivko N(μ, σ) velja

$$P(\xi \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = F(x)$$



Standardizirana normalna slučajna spremenljivka Z je slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednost z, če normalna slučajna spremenljivka ξ zavzame vrednost x.

Velja zveza

$$Z = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$$

(Za $\xi = x$ je $Z = z$)

Matematično upanje standarizirane slučajne spremenljivke Z je M(Z)=0 in varianca je V(Z)=1.

Gostoto standarizirane slučajne spremenljivke Z določa funkcija

$$\mathbf{p}(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^2}$$

Porazdelitvena funkcija pa je določena z :

$$F(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Funkcija $\Phi(z)$ je tabelirana

$$\Phi(z) = P(0 \le Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Za slučajno spremenljivko N(μ, σ) velja

$$P(\mu - \sigma \le \xi \le \mu + \sigma) = 2\Phi(1) = 0,6826$$

$$P(\mu - 2\sigma \le \xi \le \mu + 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \le \xi \le \mu + 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9974$$

Če pri binomski porazdelitvi n raste, se približuje normalni

Praktično že dobimo dobre rezultate pri takem n, da je n.p.q > 9.

V tem primeru velja :

$$P(\xi_B = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = P(k - 0.5 \le \xi_N \le k + 0.5)$$

Pri normalni porazdelitvi vzamemo

$$\mu = \mathbf{np} \qquad \text{in} \qquad \sigma = \sqrt{\mathbf{npq}}$$