

# Verjetnost, porazdelitve in ocenjevanje stat. parametrov

- Kvantitativne metode v geografiji in uvod v GIS -

dr. Gregor Kovačič, doc.

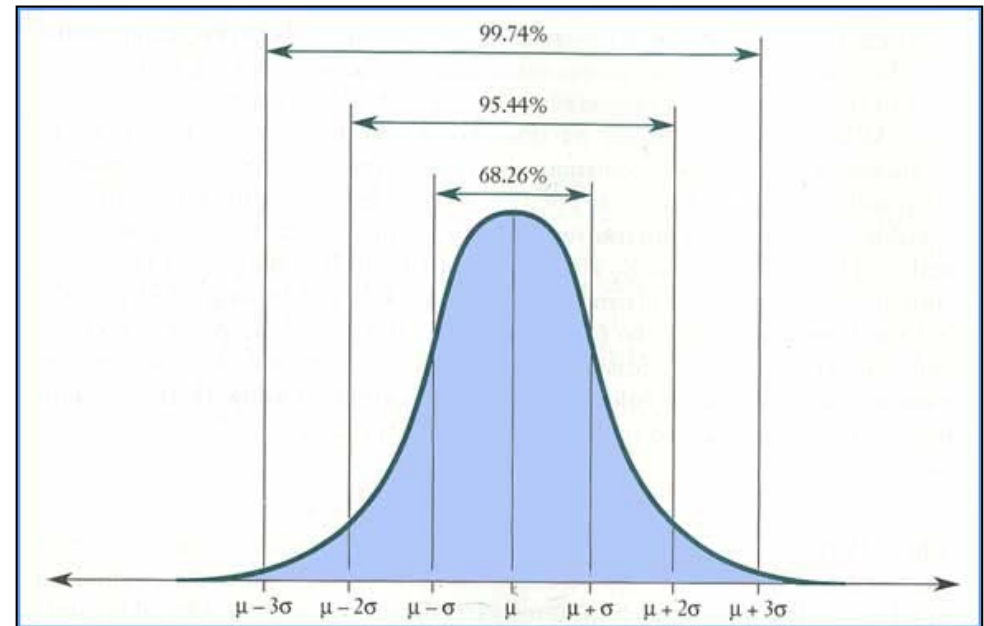
# Verjetnostne porazdelitve

1. Normalna (Gaussova) porazdelitev
  1. Standardizirana normalna porazdelitev
2. Studentova oz. *t*-porazdelitev
3.  $\chi^2$  porazdelitev → že spoznali

So še druge, ki jim ne bomo spoznali.

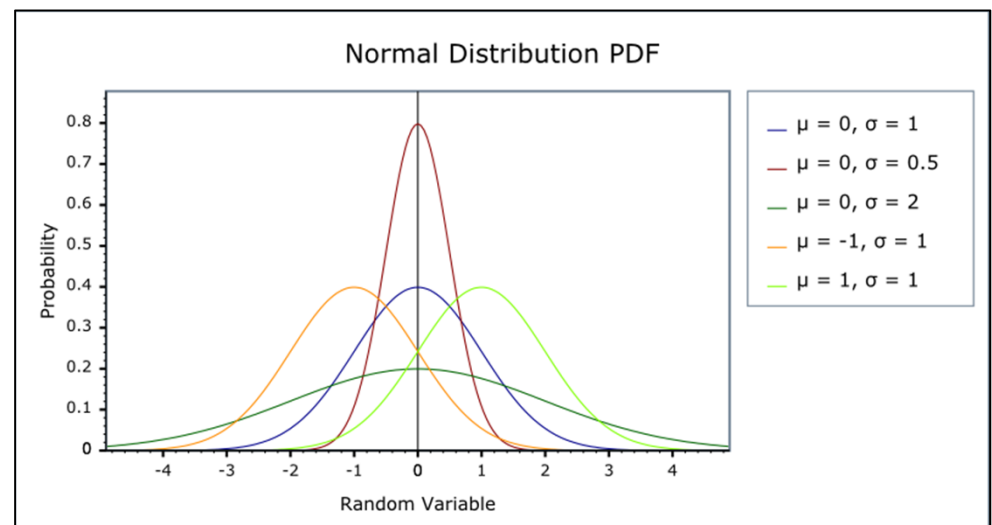
# Normalna porazdelitev

- Zvonaste oblike
- Določata jo parametra  $\mu$  (aritmetična sredina) in  $\sigma$  (standardni odklon)
  - $\mu$  vpliva na lego krivulje
  - $\sigma$  vpliva na obliko krivulje: večji  $\sigma$  pomeni večjo raztegnjenost v smeri abscisne osi
- Maksimum je v točki  $x = \mu$ ,
  - Krivulja se približuje abscisni osi, vendar je ne doseže:  $x \rightarrow \infty$  in  $x \rightarrow -\infty$
- Simetrična je okrog  $x = \mu$
- Zapis NP:  $N(5, 3)$ ;  $\mu = 5$  in  $\sigma = 3$
- Za NP velja:
  - $\mu \pm 1\sigma = 68,26\%$  vseh enot
  - $\mu \pm 2\sigma = 95,44\%$  vseh enot
  - $\mu \pm 3\sigma = 99,74\%$  vseh enot



Gostota verjetnosti za normalno porazdelitev

Gostota verjetnosti za nekaj normalnih porazdelitev



# Standardizirana normalna porazdelitev

- Vsako normalno porazdelitev lahko prevedemo v standardizirano normalno porazdelitev
  - Drugače bi morali imeti za vsak  $\mu$  in  $\sigma$  svojo preglednico
- Pretvorba v porazdelitev  $N(0, 1)$
- $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
- Vrednosti  $z$  so tabelizirane na intervalu 0–4 v koraku 0,01
- Velja:  $\pm 1\sigma = \pm 1z$ ;  $\pm 2\sigma = \pm 2z$ ;  $\pm 3\sigma = \pm 3z$
- Vrednosti  $z$  so povezane z verjetnostjo  $p$  in stopnjo značilnosti  $\alpha$  preko preglednice

Gostota verjetnosti za standardizirano normalno porazdelitev

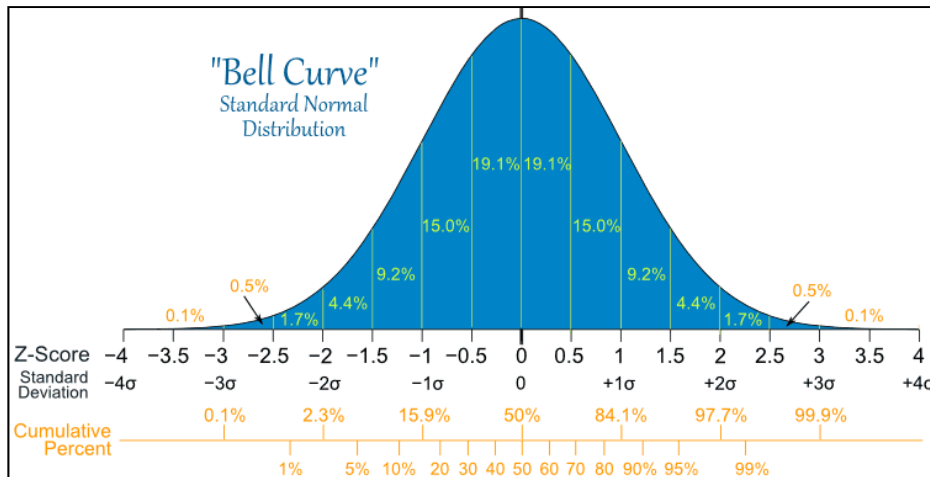
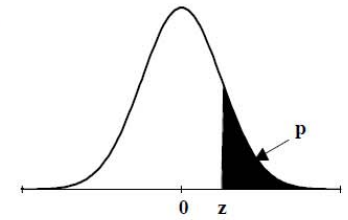


TABELA 1: STANDARDIZIRANA NORMALNA PORAZDELITEV

V tabeli je za vrednost standardiziranega odklona  $z$  navedena verjetnost  $p = P(Z \geq z)$ .

Primer:  $z = 0,93$   
 $p = 0,1762$



Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0100	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Dodatek:

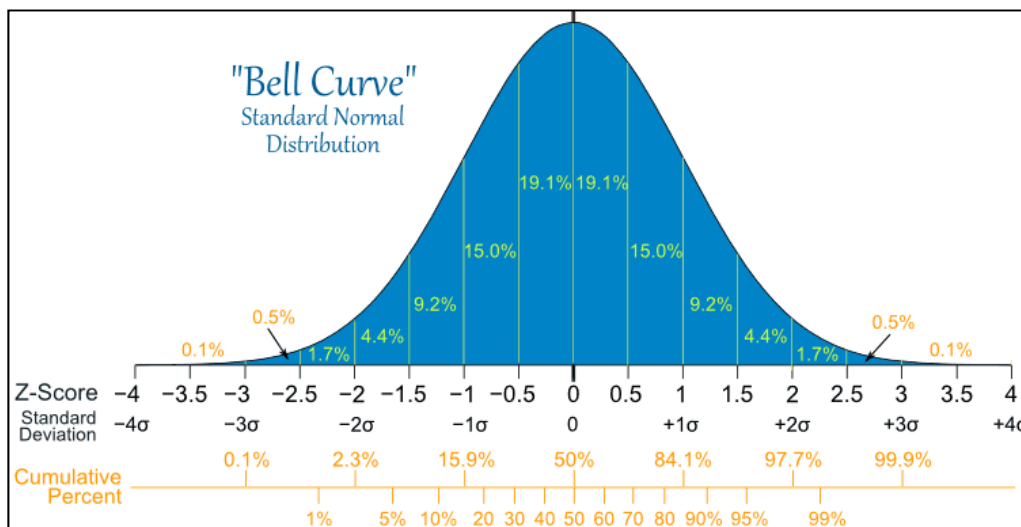
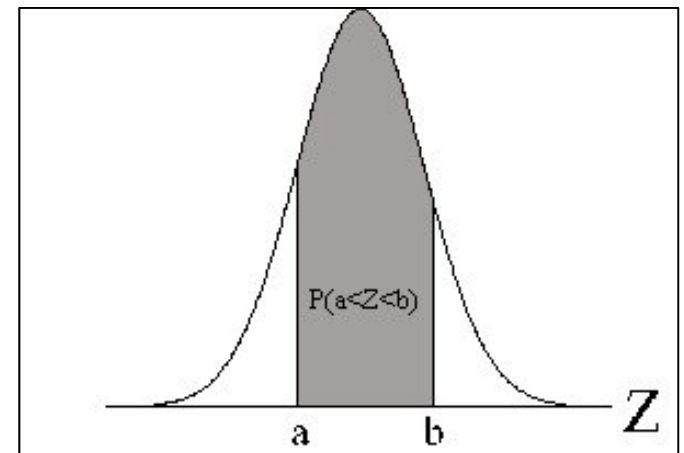
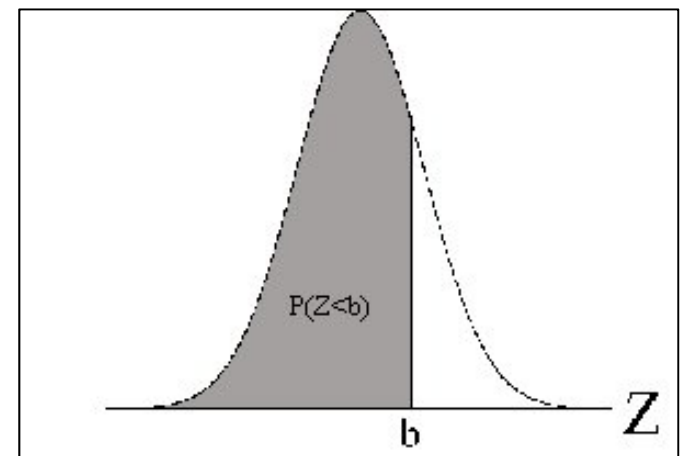
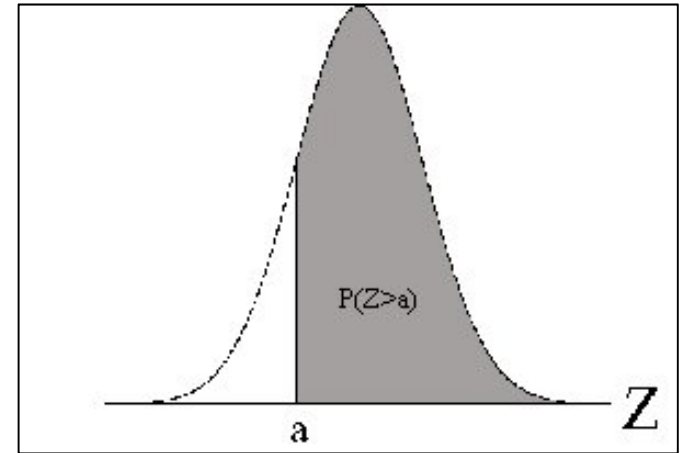
$z = 3,0$   $p = 0,00135$   
 $z = 3,5$   $p = 0,000233$

$z = 4,0$   $p = 0,0000317$   
 $z = 4,5$   $p = 0,00000340$

$z = 5,0$   $p = 0,000000287$

# Standardizirana normalna porazdelitev

- Verjetnost dogodka določa ploščina pod krivuljo standardizirane normalne porazdelitve
- Računamo lahko verjetnost:
  - Da bo imela spremenljivka vrednost večjo od določene vrednosti (primer 1)
  - Da bo imela spremenljivka vrednost manjšo od določene vrednosti (primer 2)
  - Da bo imela spremenljivka vrednost na nekem danem intervalu (primer 3)



# Standardizirana normalna porazdelitev – primer izračuna

- Izbrani vrednosti  $z$ ,  $z > 0$  je v preglednici podana verjetnost  $p$  v „desnem repu“ porazdelitve
- Kako izračunamo  $p$  za  $z = 0,93$  je prikazano na desni preglednici
- Večja kot je  $z$  vrednost, manjša je verjetnost  $p$
- Potrebna je previdnost pri razumevanju izračuna gostote verjetnosti glede na predznak (funkcija je simetrična)

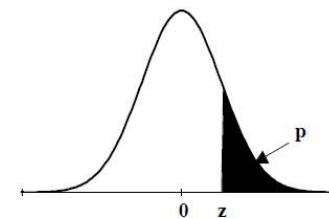
## Primer

- Denimo, da je ocena študentov geografije ob zaključku študija normalno porazdeljena spremenljivka, s povprečno vrednostjo 7,9 in standardnim odklonom 0,4. Kolikšna je verjetnost, da je povprečna ocena 8,4.
- $P(PO > 8,8) = P(Z > \frac{8,4 - 7,9}{0,4} = 1,25) = 0,1056$
- Verjetnost, da je PO nad 8,4, je 0,1056. Povedano drugače: 10,56 % populacije študentov geografije zaključí s povprečno oceno višjo od 8,4 oziroma 90 % s povprečno oceno nižjo od 8,4.

TABELA 1: STANDARDIZIRANA NORMALNA PORAZDELITEV

V tabeli je za vrednost standardiziranega odklona  $z$  navedena verjetnost  $p = P(Z \geq z)$ .

Primer:  $z = 0,93$   
 $p = 0,1762$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Dodatek:  $z = 3,0$   $p = 0,00135$        $z = 4,0$   $p = 0,0000317$        $z = 5,0$   $p = 0,000000287$   
 $z = 3,5$   $p = 0,000233$        $z = 4,5$   $p = 0,00000340$

# Standardizirana normalna porazdelitev – primeri izračunov

Primer od prej:  $N(7,9; 0,4)$

1. Zanima nas, kolikšna je verjetnost, da je povprečna ocena manjša od 8,1.

- $P(PO < 8,1) = P(Z < \frac{8,1 - 7,9}{0,4} = 0,5) = 0,3085$

- Verjetnost, da je PO manjša od 8,1  $\rightarrow 1 - 0,3085 = 0,6915$  ali 69,15 %

2. Zanima nas, kolikšna je verjetnost, da je povprečna ocena manjša od 7,2.

- $P(PO < 7,2) = P(Z < \frac{7,2 - 7,9}{0,4} = -1,75) = 0,0401$

- Verjetnost, da je PO manjša od 7,2 = 0,0401 ali 4,0 %

3. Zanima nas, kolikšna je verjetnost, da je povprečna ocena na intervalu 7,7 do 8,1.

- $P(PO > 7,7) = P(Z > \frac{7,7 - 7,9}{0,4} = -1,25) = 0,1056$

- $P(PO < 8,1) = P(Z < \frac{8,1 - 7,9}{0,4} = 0,5) = 0,3085$

- Verjetnost, da je PO na intervalu 7,7 do 8,1  $\rightarrow 1 - (0,1056 + 0,3085) = 0,5859$  oz. 58,59 %

4. Zanima nas, kolikšna je verjetnost, da je povprečna ocena na intervalu 8,1 do 8,6.

- $P(PO > 8,1) = P(Z > \frac{8,1 - 7,9}{0,4} = 0,5) = 0,3085$

- $P(PO < 8,6) = P(Z < \frac{8,6 - 7,9}{0,4} = 1,75) = 0,0401$

- Verjetnost, da je PO na intervalu 8,1 do 8,6  $\rightarrow 0,3085 - 0,0401 = 0,2684$  oz. 26,84 %

# Uporaba funkcij v MS Excelu pri standardizirani normalni porazdelitvi

## Funkcija NORM.DIST ( $x$ ; $\mu$ ; $\sigma$ ; kumulativno)

- Vrne normalno porazdelitev za navedeno srednjo vrednost in standardni odklon
- $X$  je vrednost, za katero iščemo porazdelitev
- Kumulativno ima dve možnosti, uporabljamo „TRUE“ → izračun porazdelitvene funkcije  $F(x)$ , torej verjetnost  $p$ , da je vrednost slučajne spremenljivke  $X$  manjša ali enaka vrednosti  $x$  (primer 2 na slidu 5)

## Funkcija STANDARIZIRANJE (STANDARIZE) ( $x$ ; $\mu$ ; $\sigma$ )

- Vrne normalizirano vrednost  $z$  iz porazdelitve, določene z argumentoma  $\mu$  in  $\sigma$
- $X$  je vrednost, ki jo želimo normalizirati

## Funkcija NORM.S.DIST ( $z$ ; kumulativno)

- Vrne standardno normalno porazdelitev (ima  $\mu = 0$  in  $\sigma = 1$ )
- To funkcijo uporabljamo namesto preglednice ploščin pod standardnimi normalnimi krivuljami
- $z$  je vrednost, za katero iščemo porazdelitev
- Kumulativno ima dve možnosti, uporabljamo „TRUE“ → izračun porazdelitvene funkcije  $F(x)$ , torej verjetnost  $p$ , da je vrednost slučajne spremenljivke  $X$  manjša ali enaka vrednosti  $x$  (primer 2 na slidu 5)



# Ocenjevanje parametrov (neznanih količin)

- Točkovno ocenjevanje
  - Ena vrednost ocenjuje neznano količino (npr.  $\mu$  ali  $\sigma$ )
  - Izmerjen pretok potoka je 201 l/s
- Intervalno ocenjevanje
  - Dve vrednosti določata interval, ki ocenjuje neznano količino (npr.  $\mu$  ali  $\sigma$ )
  - Izmerjen pretok potoka je  $201 \pm 22$  l/s
- Intervalno ocenjevanje v statistiki se od fizikalnega zelo razlikuje

## Primer točkovne ocene

- V slučajnem vzorcu 305 izkopanih prodnikov na vršaju potoka Bruhljica, jih je bilo 200 karbonatne litološke sestave. Vzorčni delež  $200/305 = 0,65$  je točkovna ocena za verjetnost  $p$ , da je prodnik karbonatne litološke sestave. Ta ocena je nepristranska (Tako se to v statistiki zapiše).

# Intervalna ocena parametra

- Intervalna ocena parametra ali interval zaupanja je slučajni interval, vezan na pripadajoči slučajni vzorec, saj prave vrednosti znotraj populacije ne poznamo.
  - Z več ponovitvami raziskave na vzorcu enake velikosti se bolj približujemo pravi vrednosti parametra za populacijo
- Definicija intervala zaupanja:  $P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha$ 
  - $\alpha$  je verjetnost (standardne  $\alpha$ : 0,05, 0,01 itd.)
  - Verjetnost  $(1 - \alpha)$  imenujemo zaupanje (standardne vrednosti za zaupanje: 0,95; 0,99 itd.). Navadno izrazimo v % (95 %, 99 % itd.).
  - $L_1$  in  $L_2$  sta spodnja in zgornja meja intervala zaupanja
- $L_1$  in  $L_2$  sta slučajni spremenljivki, pri vsakem vzorcu imata drugo vrednost
  - Za posamezen vzorec ne vemo, ali je  $\theta$  vsebovan v intervalu ali ne
  - Trdimo lahko, da je ta interval z verjetnostjo  $(1 - \alpha)$  eden tistih, ki vsebuje parameter  $\theta$
- Intervalno ocenjevanje v statistiki je verjetnostno ocenjevanje, zato moramo biti pri interpretaciji rezultatov pazljivi
- Izračun intervala zaupanja za posamezni parameter temelji na verjetnostni porazdelitvi njegovih vzorčnih ocen
- 95 % interval zaupanja (prave vrednosti parametra za populacijo niso poznane) torej pomeni, da bi 95 od 100 enako velikih vzorcev vsebovalo vrednost ocenjenega parametra ( $\mu, \sigma \dots$ )
  - S 95 % lahko trdimo, da je prava vrednost parametra znotraj izračunanega intervala zaupanja

# Interval zaupanja za povprečno vrednost (normalna porazdelitev)

$X \sim N(\mu, \sigma)$  in  $\sigma$  je znana

- Pomagamo si s preglednico standardizirane normalne porazdelitve  $N(0,1)$ , da določimo vrednosti  $z_{(\alpha/2)}$
- Interval zaupanja:  $I_{1,2} = \bar{x} \pm z_{(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

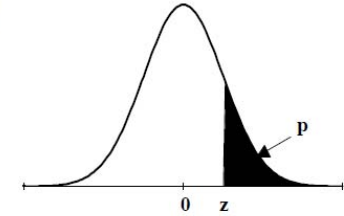
## Primer

- Izračunajmo 90 % interval zaupanja za povprečno maso sproženega gradiva (2450 g) na erozijskem žarišču, pri čemer upoštevamo, da je  $\sigma = 307$  g. Opravili smo 33 meritev.
- Torej:  $\alpha = 0,1$ ;  $\alpha/2 = 0,05 \rightarrow z_{(\alpha/2)} = z_{0,05} \rightarrow 1,645$  (preglednica)
- $I_{1,2} = 2450 \pm 1,645 \cdot \frac{307}{\sqrt{33}} = 2450 \pm 87,9$
- Obrazložitev: Interval (2362,1 g; 2537,9 g) je z verjetnostjo 0,90 eden tistih, ki vsebujejo vrednost za povprečno maso sproženega gradiva.
- Z verjetnostjo 0,9 lahko trdimo, da je prava AS na intervalu 2362,1–2537,9 g.

TABELA 1: STANDARDIZIRANA NORMALNA PORAZDELITEV

V tabeli je za vrednost standardiziranega odklona  $z$  navedena verjetnost  $p = P(Z \geq z)$ .

Primer:  $z = 0,93$   
 $p = 0,1762$



$\alpha$  – ravno na sredi zato 1,645

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Dodatek:  $z = 3,0$   $p = 0,00135$        $z = 4,0$   $p = 0,0000317$        $z = 5,0$   $p = 0,000000287$   
 $z = 3,5$   $p = 0,000233$        $z = 4,5$   $p = 0,00000340$

# Interval zaupanja za povprečno vrednost

$X \sim N(\mu, \sigma)$  in  $\sigma$  ni znana

- $\sigma$  ocenimo iz podatkov in zapišemo kot  $s$
- Interval zaupanja izpeljemo enako kot v prejšnjem primeru
- SNP nadomesti Studentova ali  $t$  - porazdelitev z  $n - 1$  stopinjami prostosti (SP)
- Interval zaupanja:  $I_{1,2} = \bar{x} \pm t_{(\alpha/2)} SP \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

## Primer

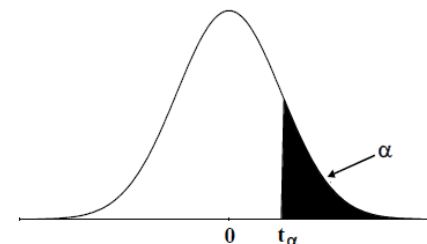
- Izračunajmo 90 % interval zaupanja za povprečno maso sproženega gradiva (2450 g) na erozijskem žarišču. Opravili smo 27 meritev.  $s$  ocenimo na 285 g.
- Torej:  $t = 0,1$ ;  $t/2 = 0,05 \rightarrow t_{(\alpha/2)} = t_{0,05}$  (SP = 26)  $\rightarrow 1,706$  (preglednica)
- $I_{1,2} = 2450 \pm 1,706 \cdot \frac{285}{\sqrt{33}} = 2450 \pm 84,6$
- Obrazložitev: Interval (2365,4 g; 2534,6 g) je z verjetnostjo 0,90 eden tistih, ki vsebujejo vrednost za povprečno maso sproženega gradiva.
- Z verjetnostjo 0,9 lahko trdimo, da je prava AS mase sproženega gradiva na intervalu 2365,4 do 2534,6 g.

TABELA 2: STUDENTOVA PORAZDELITEV

V tabeli je za verjetnost  $\alpha$  in za stopinje prostosti SP navedena vrednost  $t_{\alpha}$ , za katero velja

$$P(T \geq t_{\alpha}) = \alpha.$$

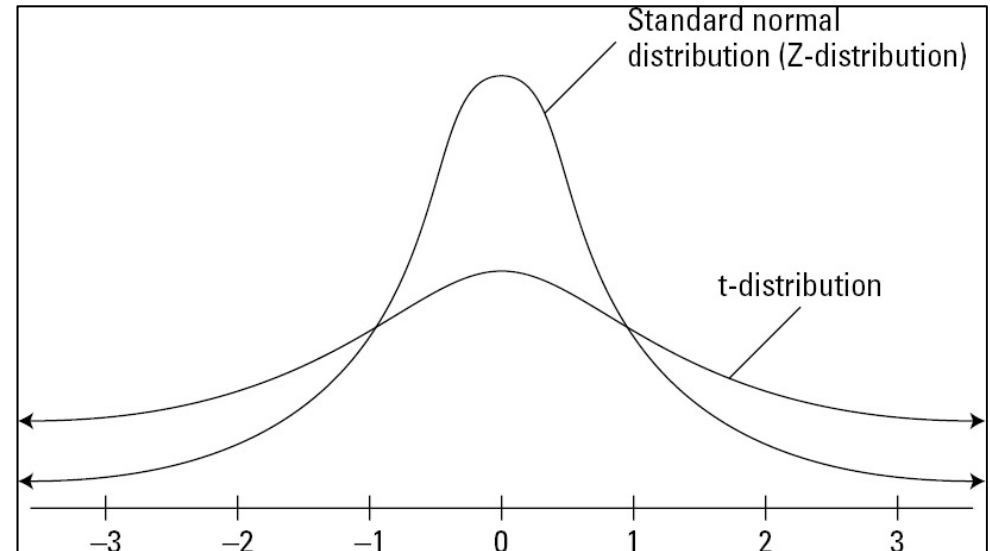
Primer:  $\alpha = 0,025$ , SP = 10  
 $t_{\alpha} = 2,228$



SP	$\alpha$						
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289	636,578
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328	31,600
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,689
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,660
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
$\infty$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

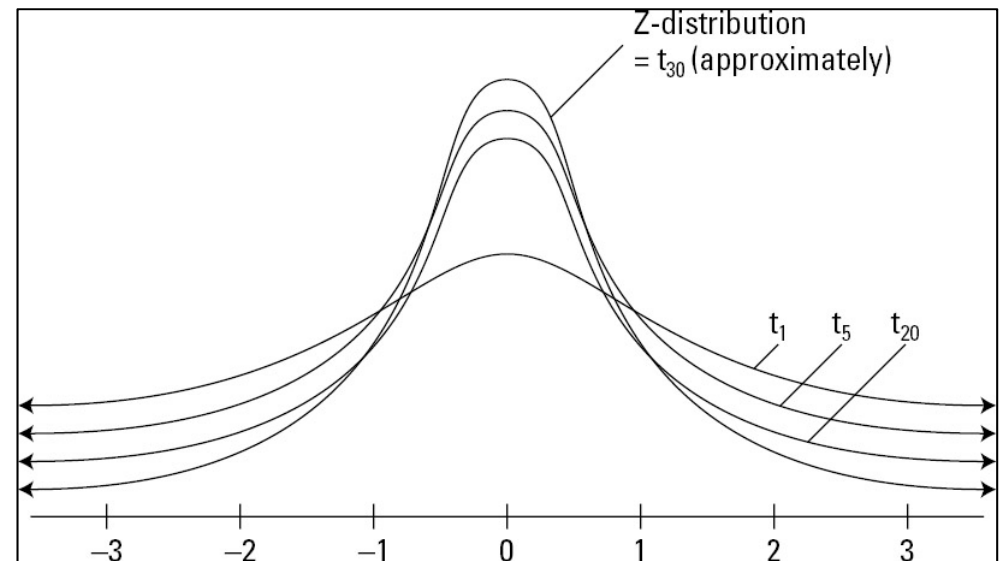
# $t$ – porazdelitev (Studentova porazdelitev)

- Zvonaste oblike, nekoliko krajša in bolj raztegnjena proti  $\infty$
- **Simetrična okrog 0**
- Stopinje prostosti ( $SP$ ) določajo obliko porazdelitve
  - Če je  $SP$  majhno število, je  $t$  – porazdelitev bolj razpotegnjena v levo in desno kot  $N(0, 1)$
  - Ko se  $SP$  povečuje postaja podobna  $N(0, 1)$
  - V limiti je enaka SNP:  $t(SP = \infty) = N(0, 1)$
- **Pri majhnih vzorcih se verjetnostna porazdelitev  $t$  -statistike (Studentova porazdelitev) bistveno loči o SNP**
  - Je bolj skrčena in debelejša
- Vrednosti so tabelirane
- **Zadnja vrstica preglednice pri  $SP = \infty$  se ujema s preglednico  $N(0, 1)$** 
  - Pri  $\alpha = 0,05 \rightarrow 1,645$
- $t$  – porazdelitev uporabljamo pri majhnih vzorcih ( $< 30$  enot)
  - Glej izračun na prejšnjem slidu



Gostota verjetnosti za  $t$  - porazdelitev

primerjava  $t$  – porazdelitve in SNP



# Veliki in majhni vzorci

## - interval zaupanja za povprečno vrednost -

Vzorec > 30 enot; uporabimo z – porazdelitev; glej modre oznake na slidu 4

- $I_{1,2} = \bar{x} \pm z_{(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
- Povprečna julijska temperatura v obdobju 1951–2000 na meteorološki postaji Kopriva je 12,4 °C, vzorčni standardni odklon smo izračunali na 0,5 °C. Izračunajmo 95 % interval zaupanja za povprečno julijsko temperaturo.
- $I_{1,2} = 12,4 \pm 1,960 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{50}} = 12,4 \pm 0,1385$
- $I_1 = 12,26$  °C;  $I_2 = 12,53$  °C
- Pri 95 % zaupanju interval (12,26–12,53 °C) vsebuje vrednost za povprečno julijsko temperaturo na meteorološki postaji Kopriva.

Vzorec < 30 enot; uporabimo t – porazdelitev; glej modre oznake na slidu 5

- $I_{1,2} = \bar{x} \pm t_{(\alpha/2)} SP \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
- Povprečen letni pretok Sušice v obdobju 2001–2013 ( $SP = 12$ ) je 144 l/s, vzorčni standardni odklon smo izračunali na 65 l/s. Izračunajmo 95 % interval zaupanja za povprečni pretok Sušice.
- $I_{1,2} = 144 \pm 2,179 \cdot \frac{65}{\sqrt{13}} = 144 \pm 39,28$
- $I_1 = 104,71$  l/s;  $I_2 = 183,28$  l/s
- Pri 95 % zaupanju interval (104,71–183,28 l/s) vsebuje vrednost za povprečen letni pretok Sušice.

# Interval zaupanja za verjetnost (delež)

## Primer

- Raziskava je pokazala, da se je od 52 anketiranih prebivalcev mestne četrti, v prejšnjih treh letih preselilo 12 oseb.
- Ocenjen delež priseljenih v zadnjih treh letih je  $12/52 = 0,23$
- Pravega deleža priseljenih v celotni populaciji (torej znotraj mestne četrti) ne poznamo, lahko postavimo interval zaupanja okrog naše ocene iz vzorca.
  - Če bi izvedli raziskavo na različnih vzorcih ( $n = 52$ ), bi dobili različne verjetnosti
- Predpostavka je, da se vzorčne verjetnosti razporejajo normalno
- Izračunajmo 95 % interval zaupanja za verjetnost, da je prebivalec četrti priseljenec.
- Interval zaupanja za delež →

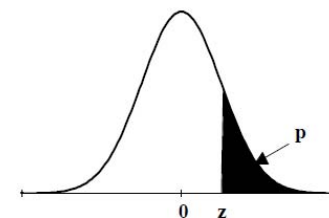
$$p_{1,2} = p \pm z_{(\alpha/2)} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

- $p_{1,2} = 0,23 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,23(1-0,23)}{52}} = 0,23 \pm 0,114$
- S 95 % lahko trdimo, da je prava verjetnost (delež) priseljenih v mestno četrt na intervalu 0,116–0,344 oziroma med 11,6 in 34,4 %.

TABELA 1: STANDARDIZIRANA NORMALNA PORAZDELITEV

V tabeli je za vrednost standardiziranega odklona  $z$  navedena verjetnost  $p = P(Z \geq z)$ .

Primer:  $z = 0,93$   
 $p = 0,1762$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Dodatek:  $z = 3,0$   $p = 0,00135$        $z = 4,0$   $p = 0,0000317$        $z = 5,0$   $p = 0,000000287$   
 $z = 3,5$   $p = 0,000233$        $z = 4,5$   $p = 0,00000340$

# Literatura in viri

- Ferligoj, Anuška. 1995. *Osnove statistike na prosojnicah*. Ljubljana: Samozaložba Z. Batagelj.
- Statistika. 2013. »*Electronic statistic textbook, StatSoft*«. [Http://www.statsoft.com](http://www.statsoft.com).
- Rogerson, Peter A. 2006. *Statistical Methods for Geography: a student guide*. London: Sage Publications.
- Kastelec, Damijana in Katarina Košmelj, 2010. *Osnove statistike z Excelom 2007*. Ljubljana: Biotehniška fakulteta. - Dostopno tudi na medmrežju.