REŠITVE

I. $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{120}x^3$

a) Produkcijsko funkcijo moramo deliti s spremenljivko, ki meri porabo produkcijskega faktorja: $AP_x = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{120}x^3}{x} = \frac{1}{5}x - \frac{1}{120}x^2$.

b) Produkcijsko funkcijo odvajamo po spremenljivki, ki meri porabo produkcijskega faktorja: $MP_x = y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2}{5}x - \frac{1}{40}x^2$.

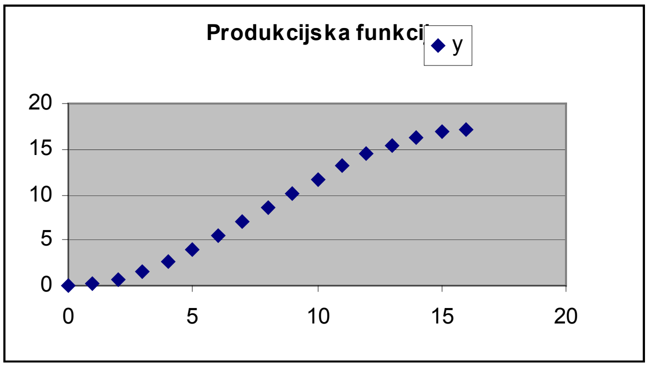
c) Upoštevamo, da doseže funkcija povprečnega produkta maksimum v sečišču s funkcijo mejnega produkta. Velja torej: $AP_x = MP_x$. Oboje smo že izračunali pod a) oziroma b) in sicer takole: $\frac{1}{5}x - \frac{1}{120}x^2 = \frac{2}{5}x - \frac{1}{40}x^2$. Rešimo kvadratno enačbo in dobimo dve rešitvi: $x = 0$ in $x = 12$. Maksimalen obseg povprečnega produkta bo torej pri obsegu njegove zaposlenosti v višini 12 enot (prva rešitev vsebinsko ni smiselna). V tem primeru bo obseg produkcije znašal 1,2 enoti (vstavimo 12 v produkcijsko funkcijo). Odgovor moramo utemeljiti še i izračunom elastičnosti. Kot vemo, je elastičnost po definiciji mogoče izračunati kot razmerje med povprečnim in mejnim produktom. Ker velja, da doseže funkcija povprečnega produkta maksimum v sečišču s funkcijo mejnega produkta, bo koeficient elastičnosti enak 1.

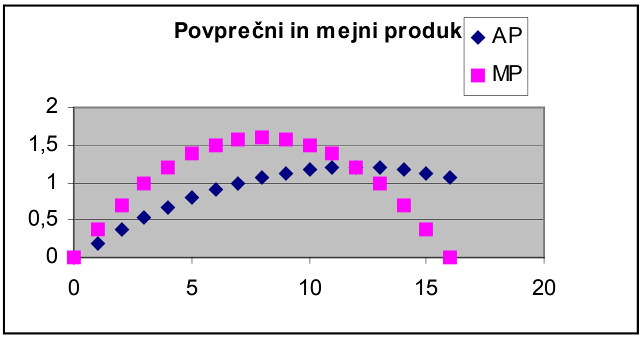
d) Obseg zaposlenosti produkcijskega faktorja je smiselno povečevati do točke, ko funkcija celotnega produkta doseže maksimum, tega pa doseže, ko je vrednost mejnega produkta enaka 0. Do rešitve pridemo torej tako: $MP_x = 0 \Rightarrow \frac{2}{5}x - \frac{1}{40}x^2 = 0$.

Rešimo to enačbo in dobimo rešitev $x = 16$.

e) Rešitev je v tabeli. Vrednosti so izračunane na temelju enačb, ki smo jih izračunali pod a) in b). Če računamo vrednosti povprečnega in mejnega produkta iz tabele, pride do določenih razlik v izračunih!

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y	0	0,192	0,733	1,575	2,667	3,958	5,4	6,942	8,533	10,125	11,667	13,108	14,4	15,492	16,333	16,875	17,067
AP	0	0,192	0,367	0,525	0,667	0,792	0,9	0,992	1,067	1,125	1,1667	1,1917	1,2	1,1917	1,1667	1,125	1,0667
MP	0	0,375	0,7	0,975	1,2	1,375	1,5	1,575	1,6	1,575	1,5	1,375	1,2	0,975	0,7	0,375	0





II. $y = 100\sqrt{x}$. Pri reševanju izhajamo iz definicijskih formul, ki jih poznamo že iz naloge I.

a) $AP_x = \dfrac{100x^{\frac{1}{2}}}{x} = 100x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{100}{\sqrt{x}}$.

b) $MP_x = y' = \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{1}{2} \cdot 100x^{-\frac{1}{2}} = 50x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{50}{\sqrt{x}}$.

c) $\varepsilon_{y,x} = \dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{x}{y} = \dfrac{MP_x}{AP_x} = \dfrac{\frac{50}{\sqrt{x}}}{\frac{100}{\sqrt{x}}} = 0{,}5$.

III. $y = \alpha \cdot x_1^{0,92} x_2^{0,12}$.

a) Za koliko se poveča obseg produkcije, če povečamo hkrati obseg porabe obeh produkcijskih faktorjev za en odstotek, ugotavljamo z izračunom t. i. donosov obsega. Te izračunamo tako, da seštejemo elastičnost obeh produkcijskih faktorjev. Kako izračunamo elastičnosti produkcijskih faktorjev smo pokazali že v nalogah I in II, rešitvi sta pa naslednji: elastičnost produkcijskega faktorja $x_1 = 0{,}92$ in produkcijskega faktorja $x_2 = 0{,}12$. Če seštejemo elastičnosti dobimo: $\varepsilon_{y,x_1} + \varepsilon_{y,x_2} = 0{,}92 + 0{,}12 = 1{,}04$. To pomeni, če povečamo obsega zaposlenosti obeh produkcijskih faktorjev hkrati za 1%, se bo obseg produkcije povečal za 1,04%. Gre torej za naraščajoče donose obsega.

b) Mejno stopnjo tehnične substitucije (MSTS) izračunamo kot razmerje mejnih produktov obeh produkcijskih faktorjev in sicer takole:

$$MSTS = \frac{MP_{x_1}}{MP_{x_2}} = \frac{0{,}92\alpha \cdot x_1^{0,92-1} x_2^{0,12}}{0{,}12\alpha \cdot x_1^{0,92} x_2^{0,12-1}} = \frac{0{,}92}{0{,}12} \cdot \frac{x_2}{x_1}.$$

IV. $y = \varepsilon \cdot x_1^{\beta} x_2^{1-\beta}$

a) Pri prejšnji nalogi smo spoznali, da izračunamo koeficient donosov obsega kot vsoto parcialnih elastičnosti produkcijskih faktorjev. Torej: $\beta + 1 - \beta = 1$. Gre torej za t. i. konstantne donose na obseg produkcijskih faktorjev. Če povečamo zaposlenost obeh produkcijskih faktorjev za en odstotek, se poveča obseg produkcije tudi za 1 odstotek.

b) Mejna stopnja tehnične substitucije je razmerje mejnih produktivnosti:

$$MSTS = \frac{MP_x}{MP_{x_2}} = \frac{\beta \alpha x_1^{\beta-1} x_2^{1-\beta}}{(1-\beta)\alpha x_1^{\beta} x_2^{1-\beta-1}} = \frac{\frac{\beta}{x_1}\alpha x_1^{\beta} x_2^{1-\beta}}{\frac{(1-\beta)}{x_2}\alpha x_1^{\beta} x_2^{1-\beta}} = \frac{x_2 \beta y}{x_1(1-\beta)y} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{x_2}{x_1}.$$

c) Obseg produkcije se bo povečal za ß%, če povečamo zaposlenost produkcijskega faktorja delo za 1% ceteris paribus.

V. $y = \alpha x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$.

a) Nalogo rešimo podobno kot nalogo b) iz prejšnje naloge in dobimo: $MSTS = \frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{x_2}{x_1}$.

b) Če povečamo obseg porabe produkcijskega faktorja kapital za odstotek, se obseg produkcije poveča za β_2%.

c) Če povečamo porabo obeh produkcijskih faktorjev hkrati za en odstotek, se poveča obseg produkcije za $\beta_1 + \beta_2$ odstotkov.

d) Mejno produktivnost dela in kapitala smo že izračunali pod nalogo a) in sicer takole: $MP_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \beta_1 \alpha x_1^{\beta_1 - 1} x_2^{\beta_2} = \frac{\beta_1}{x_1} y$ in $MP_{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \beta_2 \alpha x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2 - 1} = \frac{\beta_2}{x_2} y$.

VI. $y = \left(x_1^{\beta} + x_2^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$

a) Vemo, da je mejna stopnja tehnične substitucije po definiciji enaka razmerju mejnih produktov: $MSTS = \frac{MP_{x_1}}{MP_{x_2}} = \frac{\frac{1}{\beta}\left(x_1^{\beta} + x_2^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \beta x_1^{\beta-1}}{\frac{1}{\beta}\left(x_1^{\beta} + x_2^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \beta x_2^{\beta-1}} = \frac{x_1^{\beta-1}}{x_2^{\beta-1}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\beta}\frac{x_2}{x_1}$.

b) Izračunamo koeficient elastičnosti za spremenljivko x_2 po že znanih formulah in ugotovimo, da je elastičnost funkcija obsega zaposlenosti obeh produkcijskih faktorjev in sicer: $\varepsilon_{y,x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\frac{x_2}{y} = \frac{x_2^{\beta}}{x_1^{\beta} + x_2^{\beta}}$. Z odstotnim povečanjem obsega zaposlenosti produkcijskega faktorja kapital se bo torej obseg produkcije povečal za $\frac{x_2^{\beta}}{x_1^{\beta} + x_2^{\beta}}$ odstotkov.

c) Da ugotovimo, za koliko odstotkov se bo povečal obseg produkcije, če povečamo obseg zaposlenosti obeh produkcijskih faktorjev za odstotek, moramo izračunati koeficiente elastičnosti za oba produkcijska faktorja – za produkcijski faktor kapital smo to že storili pod nalogo b), če bi računali še za produkcijski faktor delo bi dobili: $\varepsilon_{y,x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{x_1}{y} = \frac{x_1^{\beta}}{x_1^{\beta} + x_2^{\beta}}$. Za izračun donosov obsega seštejemo elastičnosti: $\frac{x_2^{\beta}}{x_1^{\beta} + x_2^{\beta}} + \frac{x_1^{\beta}}{x_1^{\beta} + x_2^{\beta}} = 1$. Gre torej za konstantne donose na obseg produkcijskih faktorjev.

d) Mejno produktivnost dela in kapitala smo potrebovali že pri nalogi a) končna rezultata sta naslednja: $MP_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{x_1^{\beta-1}}{x_1^{\beta} + x_2^{\beta}}$ in $MP_{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{x_2^{\beta-1}}{x_1^{\beta} + x_2^{\beta}}$.

e) Nalogo lahko izpustite, ker zahteva izračunavanje odvodov drugega reda!

VII. Pri rešitvi naloge izhajamo iz vedenja, da so stroški funkcija proizvedenih količin. Da poiščemo funkcijo celotnih stroškov najprej izrazimo en produkcijski faktor z drugim pri tem pa upoštevamo pravilo, da se morata izenačevati mejna stopnja tehnične substitucije (to izračunamo kot razmerje mejnih produktov) in mejna stopnja ekonomske substitucije (to izračunamo kot razmerje cen produkcijskih faktorjev, ki so podane v nalogi). Torej: mejna stopnja tehnične substitucije x_1 za x_2 je: $MSTS_{x_1,x_2} = \frac{MP_{x_1}}{MP_{x_2}} = \frac{\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{4}}x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{4}x_2}{\frac{1}{2}x_1} = \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1}$. Mejna stopnja substitucije je torej: $\frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1}$. To izenačimo z mejno stopnjo ekonomske substitucije (MSES) x_1 za x_2, kar izračunamo kot razmerje cen: $MSES_{x_1,x_2} = \frac{1}{3}$. Obe kategoriji izenačimo:

$$MSTS_{x_1,x_2} = MSES_{x_1,x_2}$$
$$\frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{3}$$
$$3x_2 = 2x_1$$
$$x_2 = \frac{2}{3}x_1$$

S tem smo izračunali, kako lahko v produkcijski funkciji menjamo en produkcijski faktor za drugega. Vstavimo to spoznanje v produkcijsko funkcijo in izračunamo obseg porabe prvega produkcijskega faktorja kot funkcijo obsega produkcije:

$$y = x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{2}} = x_1^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{3}x_1\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{4}}x_1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{3}{4}} \quad /^{\frac{4}{3}}$$
$$y^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}x_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}x_1$$
$$x_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}.$$

Zadnji rezultat uporabimo za izračun funkcije celotnih stroškov (ti so funkcija proizvedenih količin!). Stroški so definirani kot vsota v denarju izraženih potroškov prvin poslovnega procesa. Torej:

$$TC = P_{x_1}\cdot x_1 + P_{x_2}\cdot x_2 = P_{x_1}\cdot x_1 + P_{x_2}\cdot\frac{2}{3}x_1 = 1\cdot x_1 + 3\cdot\frac{2}{3}x_1 = 3x_1 =$$
$$3\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}$$

Funkcija celotnih stroškov se torej glasi: $3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{3}}$ in je res izražena kot funkcija proizvedenih količin. Če odvajamo to funkcijo, dobimo funkcijo mejnih stroškov:

$MC = \frac{\partial TC}{y} = \frac{4}{3} 3\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}.$

VIII. $y = 2(x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}}.$

a) Postopek izračuna funkcije celotnih stroškov je enak, kot v zgornji nalogi. Najprej izrazimo en produkcijski faktor z drugim v produkcijski funkciji s pomočjo pravila izenačevanja mejne stopnje tehnične substitucije z mejno stopnjo ekonomske substitucije. Izračunamo torej: $MSTS_{x_1,x_2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}} = \frac{\frac{1}{2} 2(x_1 x_2)^{-\frac{1}{2}} x_2}{\frac{1}{2} 2(x_1 x_2)^{-\frac{1}{2}} x_1} = \frac{x_2}{x_1}.$ Mejno stopnjo tehnične substitucije izenačimo z mejno stopnjo ekonomske substitucije, ki je opredeljena z razmerjem cen produkcijskih faktorjev $MSES_{x_1,x_2} = \frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} = \frac{4}{1}.$ Dobimo torej: $MSTS_{x_1,x_2} = MSES_{x_1,x_2}.$ $\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{1} \Rightarrow x_2 = 4x_1.$ Izračunan izraz prenesemo v produkcijsko funkcijo in izračunamo: $y = 2(x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} = 2(x_1 4x_1)^{\frac{1}{2}} = 2\left(4x_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Ker moramo izraziti porabo produkcijskega faktorja v odvisnosti od obsega produkcije, izračun kvadriramo in dobimo: $y^2 = 4\left(4x_1^2\right) \Rightarrow \frac{y^2}{16} = x_1^2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} y.$ Zdaj lahko izračunamo stroškovno funkcijo, ki je funkcija proizvedenih količin:
$TC = P_{x_1} x_1 + p_{x_2} x_2 = P_{x_1} x_1 + P_{x_2} 4x_1 = 4x_1 + 4x_1 = 8x_1 = 8 \cdot \frac{1}{4} y = 2y.$ Povprečni stroški so enaki 2, kar izračunamo kot: $AC = \frac{TC}{y} = \frac{2y}{y} = 2.$

b) Mejne stroške pa izračunamo s pomočjo odvoda funkcije celotnih stroškov po spremenljivki y: $MC = \frac{\partial TC}{\partial y} = 2.$

c) Če podjetje ustvari 25 enot produkta, so povprečni stroški in mejni stroški 2 d.e. – so torej konstantni!

IX. $y = 10 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}.$

a) Pri reševanju naloge upoštevamo, da je poraba produkcijskega faktorja x_2 dana in sicer v obsegu 25 enot. To upoštevamo v produkcijski funkciji in dobimo: $y = 10 x_1^{\frac{1}{2}} 25^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = 50 x_1^{\frac{1}{2}}.$ Če želimo izračunati stroškovno funkcijo moramo porabo produkcijskega faktorja x_1 izraziti kot funkcijo obsega produkcije: $y^2 = 2500 x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y^2}{2500}.$ Zdaj lahko zapišemo stroškovno funkcijo in sicer: $TC = P_{x_1} x_1 + P_{x_2} x_2 = 4x_1 + 4 \cdot 25 = 4 \cdot \frac{y^2}{2500} + 100 = 100 + \frac{4}{2500} y^2.$ Mejne stroške

izračunamo kot odvod funkcije celotnih stroškov po spremenljivki y:
$MC = \frac{\partial TC}{\partial y} = \frac{8}{2500} y = \frac{2}{625} y.$

X. $TC = 50y - 6y^2 + y^3$

a) Stroški na enoto produkta so najnižji v sečišču s funkcijo mejnih stroškov. Izračunamo torej funkciji mejnih in povprečnih stroškov in jih izenačimo, da dobimo obseg produkcije v tej točki. Povprečni stroški so: $AC = \frac{TC}{y} = 50 - 6y + y^2$ in mejni stroški so: $MC = \frac{\partial TC}{\partial y} = 50 - 12y + 3y^2$. Oba rezultata izenačimo in dobimo:

$50 - 6y + y^2 = 50 - 12y + 3y^2$

$6y - 2y^2 = 0$

$3y - y^2 = 0$

$y(3 - y) = 0$

Dobimo torej dve rešitvi: y=0 in y=3. Prva rešitev ekonomsko nima vsebine, druga pa. Ugotovimo torej, da bodo povprečni stroški najnižji, ko bo obseg produkcije znašal 3 enote.

b) Minimalne povprečne stroške izračunamo tako, da vstavimo izračunan obseg produkcije pri minimalnih povprečnih stroških v stroškovno funkcijo in dobimo: $TC = 50 \cdot 3 - 6 \cdot 9 + 27 = 123.$ Minimalni povprečni stroški torej znašajo 123 d.e.

c) Mejni stroški pri tem obsegu produkcije so: $MC = 50 - 12 \cdot 3 + 27 = 41.$

XI $MC = 12 - 5y + 3y^2$

a) Celotne stroške izračunamo s pomočjo integrala funkcije mejnih stroškov in upoštevamo, da znašajo fiksni stroški 22 d.e.: $TC = \int MC \,\mathrm{dc} = 12y - \frac{5}{2} y^2 + y^3 + 22 = TC.$

b) Poiskati moramo minimum funkcije mejnih stroškov. Pri tem si pomagamo z znanjem iz matematike – funkcija doseže ekstrem (minimum ali maksimum) v točki, kjer je njen prvi odvod enak nič. Izračunamo torej prvi odvod funkcije mejnih stroškov:

$\frac{\partial MC}{\partial y} = -5 + 6y = 0$

$6y = 5$

$y = \frac{5}{6}$

Mejni stroški bodo troje najmanjši pri obsegu produkcije $y = \frac{5}{6}$. Da je ekstrem res minimum, bi lahko dokazali z izračunom drugega odvoda, vendar to ni treba, ker vemo, da stroškovne funkcije navzgor niso omejene!

c) Povprečne celoten stroške izračunamo kot: $AC = \frac{TC}{y} = 12 - \frac{5}{2} y + y^2 + \frac{22}{y}$. Povprečne variabilne stroške pa izračunamo kot: $AVC = \frac{VC}{y} = \frac{12y - \frac{5}{2} y^2 + y^3}{y} = 12 - \frac{5}{2} y + y^2.$

d) Vemo, da doseže funkcija povprečnih variabilnih stroškov svoj minimum v sečišču s funkcijo mejnih stroškov. Izenačimo torej obe funkciji in poiščemo vrednost za y, ko se povprečni stroški skladajo z mejnimi stroški:

$$AVC = MC$$

$$12-\frac{5}{2}y+y^2 = 12-5y+3y^2$$

$$-5y+2y^2 = -10y+6y^2$$

$$5y-4y^2 = 0$$

$$y(5-4y)=0$$

Prva rešitev je y=0, ki nima ekonomske vsebine, do druge rešitve pa pridemo takole:

$$5-4y=0$$

$$5=4y$$

$$y=\frac{5}{4}.$$

Povprečni variabilni stroški bodo najmanjši pri obsegu produkcije $y=\frac{5}{4}$.

e) Mejne stroške pri obsegu produkcije, ko so povprečni variabilni stroški najmanjši izračunamo tako, da vrednost izračunanega y vstavimo v funkcijo mejnih stroškov:

$$MC = 12-5\frac{5}{4}+3\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 12-\frac{25}{4}+\frac{75}{16} = \frac{192-100+75}{16} = \frac{167}{16} = 10{,}4375.$$

XII.

y	TC	MC	AFC	AVC	ATC	FC	VC
0	100	-	–	–	–	100	0
1	110	10	100,00	10,00	110	100	10
2	130	20	50,00	15,00	65	100	30
3	165	35	33,33	21,67	55	100	65
4	220	55	25,00	30,00	55	100	120
5	300	80	20,00	40,00	60	100	200

XIII. Izpustite!

XIV. Mejne koristnosti izračunamo kot odvode funkcij celotne koristnosti.

$U(x_1,x_2)$	$MU(x_1)$	$MU(x_2)$
$2x_1+3x_2$	2	
$x_1 \cdot x_2$	x_2	x_1
$\ln(x_1)+x_2$	$\frac{1}{x_1}$	1
$x_1^a+x_2^b$	ax_1^{a-1}	bx_2^{b-1}
$2\sqrt{x_1}+x_2$	$x_1^{-\frac{1}{2}}$	1
$x_1^a \cdot x_2^b$	$ax_1^{a-1}x_2^b$	$bx_2^{b-1}x_1^a$
$(x_1+2)(x_2+1)$	x_2+1	x_1+2

$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$	$\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$

Opomba: V nalogah je tiskarska napaka, namesti $MU(x_2)$ piše $U(x_2)$!

XV. $U = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$

a) Mejni koristnosti izračunamo kot odvod funkcije celotne koristnosti:

$MU_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ in $MU_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_2^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

b) Racionalno gospodinjstvo bo imelo takšno kombinacijo obeh dobrin, pri kateri se izenačujejo mejne koristnosti posameznih dobrin na denarno enoto oziroma tisto kombinacijo dobrin, ko bodo mejne stopnje substitucije mejni stopnji ekonomske substitucije (podoben koncept kot pri produkcijskih in stroškovnih funkcijah). Mejno stopnjo substitucije (MSS) x_1 za x_2 izračunamo kot razmerje njunih mejnih koristnosti:

$MSS = \frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x_2}{x_1}$. Izračunano mejno stopnjo substitucije izenačimo z

mejno stopnjo ekonomske substitucije (MSES), ki jo izračunamo kot razmerje cen med x_1 in x_2: $MSES = \frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} = \frac{1}{2}$. Izenačimo MSS z MSES: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 2x_2$.

Upoštevamo, da je gospodinjstvo soočeno z omejitvijo v razpoložljivem dohodku $R = 200$, ki ga lahko nameni za nakup obeh dobrin. Proračunsko omejitev gospodinjstva zapišemo kot: $R = P_{x_1} x_1 + P_{x_2} x_2$ in vpeljemo izračunano razmerje med dobrinama: $x_1 = 2x_2$. S tem dobimo:

$200 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$

$200 = 2x_2 + 2x_2$

$200 = 4x_2$

$x_2 = 50.$

Od tod lahko izračunamo še obseg nakupa prve dobrine: $x_1 = 2x_2 = 2 \cdot 50 = 100$.

Racionalno gospodinjstvo bo torej kupilo 100 enot prve in 50 enot druge dobrine pri danih cenah in pri danem razpoložljivem dohodku.

XVI. $U = x_1 x_2$

a) Optimalno kombinacijo obeh dobrin izračunamo enako kot zgoraj. Izenačimo mejno stopnjo substitucije z mejno stopnjo ekonomske substitucije in vpeljemo omejitev v razpoložljivem dohodu. $MSS_{x_1,x_2} = \frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = \frac{x_2}{x_1}$, $MSES_{x_1,x_2} = \frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \Rightarrow MSS = MSES$

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{6} x_1$. Vpeljemo omejitev v dohodku:

$$600 = 25 \cdot x_1 + 30 \cdot \frac{5}{6} x_1$$

$$600 = 50x_1$$

$$x_1 = 12.$$

Prve dobrine bo izbrano gospodinjstvo kupovalo v obsegu 12 enot in druge dobrine v obsegu : $x_2 = \frac{5}{6} x_1 = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10.$

b) S spremembo cene prve dobrine se spremeni mejna stopnja ekonomske substitucije in sicer: $MSES = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$. S tem se spremeni tudi razmerje med dobrinama: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3} x_1$ in posledično se spremeni razmerje v enačbi dohodka:

$$600 = 40x_1 + 30 \cdot \frac{4}{3} x_1$$

$$600 = 80x_1$$

$$x_1 = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

$x_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{2} = 10$ Racionalno gospodinjstvo bo torej po spremembi cen kupovalo 7,5 enot prve dobrine in 10 enot druge dobrine.

c) Spustite (nalogo rešimo tako, da vpeljemo predpostavko o spremembi cene druge dobrine na 40 d.e. ob ceni prve dobrine na 25 d.e.).

XVII. $U = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{3}}$

a) Nalogo rešimo z izenačevanjem mejne stopnje substitucije z mejno stopnjo ekonomske substitucije in z vpeljavo omejitve razpoložljivega dohodka:

$$MSS_{x_1,x_2} = MSES_{x_1,x_2}$$

$$\frac{\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{4}} x_2^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}$$

$$6x_2 = 4x_1$$

$$x_2 = \frac{2}{3} x_1.$$

Vstavimo ta rezultat v omejitev dohodka:

$$70 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot \frac{2}{3} x_1$$

$$70 = \frac{7}{3} x_1$$

$$x_1 = 30 \Rightarrow\Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} x_1 \Rightarrow x_2 = 20.$$

Racionalno gospodinjstvo bo torej kupovalo 30 enot prve in 20 enot druge dobrine.

b) Če se spremeni cena druge dobrine na 3 denarne enote imamo:

$MSS = MSES$

$\frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{3}$

$9x_2 = 4x_1$

$x_2 = \frac{4}{9}x_1$

Iz omejitve dohodka izračunamo:

$70 = x_1 + 3 \cdot \frac{4}{9}x_1$

$70 = \frac{7}{3}x_1$

$x_1 = 30 \Rightarrow\Rightarrow x_2 = \frac{4}{9} \cdot 30 = \frac{40}{3}.$

Po podražitvi druge dobrine bo racionalno gospodinjstvo kupilo 30 enot prve dobrine in $\frac{40}{3}$ druge dobrine.

c) Najprej izračunamo raven koristnosti pred podražitvijo: $U = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{3}} = 30^{\frac{1}{4}} \cdot 20^{\frac{1}{3}} = 6{,}35.$

Zdaj ob uporabi razmerja med dobrinama po podražitvi $\left(x_2 = \frac{4}{9}x_1\right)$ ohranimo izračunano raven koristnosti in izračunamo nove količine obeh dobrin:

$6{,}35 = x_1^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{4}{9}x_1\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x_1 = 37{,}82.$ Zdaj upoštevamo $\left(x_2 = \frac{4}{9}x_1\right)$ in izračunam še x_2:

$x_2 = \frac{4}{9} \cdot 37{,}82 = 16{,}8.$ Zdaj izračunamo dohodek, ki ga potrebujemo po podražitvi, da ohranimo enako raven koristnosti: $R = P_{x_1}x_1 + P_{x_2}x_2 = 1 \cdot 37{,}82 + 3 \cdot 16{,}8 = 88{,}22$. Po podražitvi bi torej gospodinjstvo moralo razpolagati z 88,22 d.e., da bi ohranilo izhodiščno raven koristnosti.

XVIII. $x = -4P_x + 16$

a) Dohodek oziroma realizacija (R) je zmnožek prodanih količin in cen:

$R = x \cdot P_x = 16P_x - 4P_x^2$.

b) Funkcijo mejnega dohodka oziroma mejne realizacije (MR) izračunamo kot odvod funkcije celotne realizacije: $MR = \frac{\partial R}{\partial P_x} = 16 - 8P_x$.

c) Cenovna elastičnost povpraševanja je definirana kot:

$\varepsilon_{x,P_x} = \frac{\partial x}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{x} = -4 \cdot \frac{P_x}{16 - 4P_x} = \frac{-4P_x}{4(4 - P_x)} = -\frac{P_x}{(4 - P_x)}$. Kot vidimo, je koeficient elastičnosti funkcija cene!

XIX. $P_x = 5 - \frac{1}{2}x$

a) Prohibitivna cena je tista, pri kateri je obseg povpraševanja enak 0 – torej x=0:

$P_x = 5 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 5$. Prohibitva cena znaša torej 5 d.e.

b) V točki saturacije pa velja $P_x = 0 \Rightarrow$

$0 = 5 - \frac{1}{2}x$

$x = 10.$

10 enot dobrine x je torej največja količina, ki so jo kupci pripravljeni kupiti, če tudi je cena enaka 0.

c) Cenovna elastičnost (funkcijo povpraševanja moramo najprej pretvoriti tako, da bo funkcija cene!): $P_x = 5 - \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 10 - 2P_x$. Zdaj izračunamo cenovno elastičnost kot:

$$\varepsilon_{x,P_x} = \frac{\partial x}{\partial P_x}\frac{P_x}{x} = -2\frac{P_x}{10-2P_x} = \frac{-2P_x}{2(5-P_{x)})} = -\frac{P_x}{(5-P_x)}.$$

XX. $x = 25P_x^{-3}$

a) Elastičnost izračunamo po definicijski enačbi: $\frac{\partial x}{\partial P_x}\cdot\frac{P_x}{x} = -3\cdot 25P_x^{-4}\cdot\frac{P_x}{x} = \frac{-3x}{P_x}\frac{P_x}{x} = -3.$

XXI. $x = 3R^{0,2}$

a) Dohodkovno elastičnost izračunamo po definicijski enačbi:

$$\frac{\partial x}{\partial R}\cdot\frac{R}{x} = 0{,}2\cdot 3R^{0,2-1}\cdot\frac{R}{x} = \frac{0{,}2x}{R}\cdot\frac{R}{x} = 0{,}2.$$

XXII. $x_1 = P_{x_1}^{-1,32}\cdot P_{x_2}^{0,4}$

a) Direktno cenovno elastičnost povpraševanja izračunamo po definicijski enačbi:

$$\varepsilon_{x_1,P_{x_1}} = \frac{\partial x}{\partial P_{x_1}}\cdot\frac{P_{x_1}}{x} = -1{,}32P_{x_1}^{-1,32-1}P_{x_2}^{0,4}\cdot\frac{P_x}{x_1} = -1{,}32P_{x_1}^{-1}\cdot P_{x_1}^{-1,32}P_{x_2}^{0,4}\cdot\frac{P_{x_1}}{x_1} = \frac{-1{,}32}{P_{x_1}}\cdot x_1\cdot\frac{P_{x_1}}{x_1} = -1{,}32.$$

b) Križno cenovno elastičnost povpraševanja po dobrini x_1 pa izračunamo po naslednji definicijski enačbi: $\varepsilon_{x_1,P_{x_2}} = \frac{\partial x_1}{\partial P_{x_2}}\cdot\frac{P_{x_2}}{x_1} = 0{,}4\cdot P_{x_1}^{-1,32}\cdot P_{x_2}^{0,4-1}\cdot\frac{P_{x_2}}{x_1} = \frac{0{,}4}{P_{x_2}}\cdot x_1\cdot\frac{P_x}{x_1} = 0{,}4.$

XXIII. $x = 25 - 6P_x$

a) Cenovna elastičnost je definirana z: $\frac{\partial x}{\partial P_x}\cdot\frac{P_x}{x} = -6\cdot\frac{P_x}{(25-6P_x)}$. Pri ceni $P_x = 25$ znaša cenovna elastičnost povpraševanja: $-6\cdot\frac{P_x}{(25-6P_x)} = -6\cdot\frac{25}{-5\cdot 25} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$

b) To nalogo lahko izpustite!

XXIV. $x = 7 - \frac{3}{2}P_x$

a) Velikost celotnega prihodka bo maksimalna, ko bo vrednost mejnega prihodka enaka 0. Najprej torej izračunamo funkcijo celotnega prihodka: $R = x\cdot P_x = 7P_x - \frac{3}{2}P_x^2$. Z odvajanjem funkcije celotnega prihodka izračunamo funkcijo mejnega prihodka: $MR = \frac{\partial R}{\partial P_x} = 7 - 3P_x$. Če želimo izračunati ceno, pri kateri bo celotni dohodek maksimalen, izenačimo funkcijo mejnega dohodka z 0 in dobimo:

$$7 - 3P_x = 0$$
$$3P_x = 7$$
$$P_x = \frac{7}{3} = 2{,}33.$$

Pri ceni 2,33 d.e. bo torej celotni prihodek maksimalen.

Naloge b) in XXV. ter XXVI lahko spustite!