

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Splošna matematika, Uporabna matematika

2. delni test pri predmetu Analiza II
29. 1. 2013

Ugasni in odstrani mobilni telefon. Vse odgovore natančno utemelji.
Čas reševanja: **120 minut**.

1. **[25]** Lik L v ravnini je omejen s krivuljama $y^2 = 2x$ in $x^2 + y^2 = 8$, kjer je $x \geq 0$. Izračunaj volumen in površino rotacijskega telesa, ki ga dobimo tako, da L zavrtimo okoli osi x .

2. **[25]**

- (a) Naj bo f zvezna funkcija na $[0, 1]$. Dokaži enakost

$$\int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

- (b) Izračunaj integral

$$\int_0^\pi x \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

3. **[25]** Funkcijsko zaporedje $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je podano s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{n^2} & ; \quad x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & ; \quad x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Razišči konvergenco po točkah in enakomerno konvergenco funkcijskega zaporedja (f_n) . Vsak odgovor utemelji!

4. **[25]** S pomočjo razvoja funkcije $f(x) = (1 - x^2) \ln(1 + x)$ v Taylorjevo vrsto izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2} n(n+2)}.$$

Rešitev četrte naloge:

$$\begin{aligned}(1-x^2)\ln(1+x) &= (1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}x^{n+2}}{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}x^{n+2}}{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}(n-n-2)}{n(n+2)} \\ &= x - \frac{x^2}{2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n(n+2)}\end{aligned}$$