Nekaj izpitnih nalog iz elementarne matematike I

1. V trapezu z osnovnicama $|AB| = 7$ cm in $|CD| = 2$ cm in krakoma $|BC| = 5$ cm in $|CA| = 4$ cm se nosilki krakov sekata v točki S. Izračunaj dolžino daljice BS.

2. (a) Dokaži, da v pravokotnem trikotniku s katetama a in b in radijema včrtanega kroga r in očrtanega kroga R velja enakost $a + b = 2(r + R)$.
   (b) Upoštevaj to enakost in konstruiraj pravokotni trikotnik s podatkoma $r = 1.5$ cm in $R = 4$ cm.

3. Tetivni štirikotnik $ABCD$ je včrtan v krog K z radijem R. V krogu K središčni koti nad loki AB, BC, CD in DA zaporedoma merijo 2α, 2β, 2γ in 2δ.
   (a) Izrazi kote φ_A, φ_B, φ_C in φ_D štirikotnika $ABCD$ s koti α, β, γ, δ.
   (b) Izrazi stranice štirikotnika $ABCD$ z radijem R in koti α, β, γ, δ.
   (c) Dokaži zvezo: $\sin\varphi_A \cdot \sin\varphi_B = \sin\alpha \cdot \sin\gamma + \sin\beta \cdot \sin\delta$.

4. Za poljubno točko P v notranjosti trikotnika ABC potegnemo poltrake AP, BP, CP in njihova presečišča s stranicami a, b, c označimo X_P, Y_P, Z_P. Točko X_P prezrcalimo preko razpolovišča A' stranice a in dobimo točko X'_P. Podobno z zrcaljenjem točke Y_P preko razpolovišča B' stranice b dobimo točko Y'_P in z zrcaljenjem točke Z_P preko razpolovišča C' stranice c dobimo točko Z'_P.
   (a) Dokaži, da se daljice AX'_P, BY'_P, CZ'_P sekajo v skupni točki, ki jo označimo s $\hat{P}$.
   (b) Preslikavo ζ notranjosti trikotnika vase, ki točki P priredi točko $\hat{P}$, imenujemo *Cevova transformacija*. Poišči vse točke, ki jih Cevova transformacija preslika vase: $\zeta(U) = U$.

5. V trikotniku ABC naj bo R radij trikotniku očrtanega kroga.
   (a) Načrtaj trikotnik ABC s podatki $R = 4$ cm, $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$.
   (b) Dokaži, da je ploščina p trikotnika ABC enaka

$$p = \frac{1}{2} R\,(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)$$

   (Namig: zvezo najprej dokaži v ostrokotnem trikotniku, ki ga razrežemo na tri trikotnike z vrhom v središču očrtanega kroga O.)

6. V trikotniku ABC so točke D, E, F nožišča višin na stranice c, a, b. Naj bo G točka na poltraku CD, za katero velja $|CG| = |CD| + |DG| = v_c + v_a$. Vzporednica nosilki stranice c skozi točko G seka nosilko stranice a v točki H. Točka K je nožišče pravokotnice iz točke B na premico GH.

(a) Dokaži, da sta trikotnika BKH in AEB skladna.

(b) Dokaži, da je $|CH| = a + c$.

(c) Konstruiraj trikotnik ABC s podatki $a = 4$ cm, $c = 4{\cdot}5$ cm in $v_a + v_c = 7$ cm.

7. (a) Dokaži: če sta v trapezu diagonali enako dolgi, potem je trapez enakokrak.

(b) V trikotniku ABC sta A' in B' razpolovišči stranic a in b. Dokaži: razpolovišča X, Y, Z, W stranic AB, BA', $A'B'$, $B'A$ so oglišča paralelograma, katerega ploščina znaša $\frac{3}{8}$ ploščine trikotnika ABC.

(c) Dokaži: paralelogram $XYZW$ je romb natanko tedaj, ko je trikotnik ABC enakokrak.

8. V štirikotniku $ABCD$, ki je konveksen in ni tetiven, Eulerjeva premica trikotnika ABC sovpada z Eulerjevo premico trikotnika ACD. Dokaži:

(a) Skupna Eulerjeva premica obeh trikotnikov je ravno simetrala diagonale AC.

(b) Štirikotnik je deltoid, torej $|AB| = |BC|$ in $|AD| = |DC|$.

9. V enakokrakem trapezu $ABCD$ z osnovnicama $a = |AB|$ in $c = |CD|$ in krakoma $b = |BC| = |AD|$ se diagonali sekata v točki S. Diagonala e meri 5cm, vsota $a + b = 8$cm, kot $\angle ASB$ pa $100°$.

(a) Konstruiraj enakokraki trapez $ABCD$.

(b) Izračunaj kot $\alpha = \angle DAB$.

10. V trikotniku ABC merijo stranice $a = 3$ cm, $b = 4$ cm in $c = 5$ cm.

(a) Preveri, da je trikotnik pravokoten.

(b) Izračunaj radije: r včrtanega kroga, r_a, r_b, r_c pričrtanih krogov in r_9 krožnice devetih točk.

(c) V danem primeru izraz *krožnica devetih točk* ni najbolj primeren. Pojasni, zakaj.

(d) Izračunaj kot, pod katerim Eulerjeva premica trikotnika ABC seka hipotenuzo c.