Elementarna matematika, vaje

Skladnostni izreki. Središčni in obodni kot. Tetivni štirikotniki.

1. Nad stranicami AB, BC, AC trikotnika ABC konstruiramo kvadrate $AFGB, BHIC$ in $ACDE$. Dokaži: $|BE|=|CF|$, $|AH|=|CG|$.

2. Štirikotnik je paralelogram, če ima dva para vzporednih in enako dolgih stranic. Dokaži:
   a) če sta v štirikotniku po dve in dve nasprotni stranici enako dolgi, je štirikotnik paralelogram;
   b) če ima štirikotnik dva para vzporednih stranic, je paralelogram
   c) če ima štirikotnik dve stranici vzporedni in enako dolgi, je paralelogram.

3. Dokaži, da se diagonali v paralelogramu razpolavljata.

4. Dokaži, da se diagonali v paralelogramu sekata pod pravim kotom natanko tedaj, ko je ta paralelogram romb.

5. V konveksnem štirikotniku $ABCD$ velja $|AD|=|BC|$, kota pri ogliščih A in B pa skupaj merita 120°. Nad stranico CD z zunanje strani konstruiramo enakostranični trikotnik CDE. Dokaži, da je tudi trikotnik ABE enakostraničen.

6. Na krožnici s središčem S zaporedoma izberemo točke A, B, C, D tako, da so lokom AB, BC, CD pripadajoči središčni kot enaki in merijo $\alpha < 60^\circ$. Naj bo X presečišče daljic SC in BD, Y pa presečišče daljic SB in AD. Dokaži:
   a) X razpolavlja BD
   b) $\angle DAB = \alpha$
   c) Trikotnik ABY je enakokrak.

7. Naj bosta AC in BD dva med seboj pravokotna premera krožnice K s središčem S. Na loku CD krožnice K izberemo točko P. Naj bo E_P presečišče daljic AP in BD, q vzporednica nosilki daljice AC skozi točko E_P in M_P presečišče premice q z daljico BP.
   a) Dokaži, da je $D E_P M_P P$ tetivni štirikotnik.
   b) Izračunaj kote $\angle APD$, $\angle E_P M_P D$ in $\angle BDM_P$.
   c) Katero množico točk opišejo točke M_P, ko točka P preteče cel lok CD?

8. Na krožnici K zaporedoma izberemo točke A, B, C in D. Dokaži, da je tetiva, ki povezuje razpolovišči lokov AB in CD pravokotna na tetivo, ki povezuje razpolovišči lokov BC in DA.

9. V ostrokotnem trikotniku *ABC* iz enega oglišča potegnemo višino na nasprotno stranico, iz drugega oglišča težiščnico in iz tretjega oglišča simetralo kota. Njihova presečišča tvorijo trikotnik *XYZ*. Dokaži, da ta trikotnik ne more biti enakostraničen.

10. V tetivnem štirikotniku *ABCD* stranici *CD* in *AB* nista vzporedni in se njuni nosilki sekata v točki *P*. Dokaži: $|AD|:|BC| = |PA|:|PC|$.

Cevov izrek:

11. V trikotniku *ABC* na tretjini daljice *AB* leži točka *Z* in na petini daljice *BC* leži točka *X*. Kje na stranici *AC* mora ležati točka *Y*, da bodo Cevove daljice *AX, BY* in *CZ* konkurentne.

12. Na stranici *AB* trikotnika *ABC* izberemo poljubno točko *D* in skoznjo potegnemo vzporednico s stranico *AC*. Ta vzporednica seka stranico *BC* v točki *E*. Naj bo *B'* razpolovišče stranice *b*. Dokaži, da so Cevove daljice *AE, CD* in *BB'* konkurentne.

13. Dani sta vzporedni premici *p* in *q* ter na premici *p* daljica *AB*. Samo z uporabo ravnila konstruiraj razpolovišče daljice *AB*.

Stewartov izrek:

14. Izračunaj dolžino Cevove daljice na simetrali notranjega kota v trikotniku.

15. Izračunaj razdaljo med težiščem *G* in središčem očrtanega kroga *O* trikotnika *ABC*. (Namig: trikotnik *OBB'*).

16. Dokaži: če sta v trikotniku dve težiščnici enako dolgi, je trikotnik enakokrak.

Včrtane krožnice in tangente. Pričrtane krožnice.

17. Konstruiraj skupne tangente na dve dani krožnici. Obravnavaj različne možnosti glede na lego danih krožnic.

18. Dokaži zvezi:

    a) $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

    b) $\sqrt{r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C} = |ABC|$

Sinusni in kosinusni izrek:

19. Načrtaj trikotnike ABC z danimi podatki, nato pa izračunaj vse tri stranice tega trikotnika:
    a) $a+b=17, \quad \alpha=70°, \quad \beta=80°$
    b) $c-a=6, \quad \alpha=20°, \quad v_c=4.$

Načrtovalne naloge

20. Načrtaj trikotnike s podatki:

    a) $c=5, \quad t_a=6, \quad t_b=9$
    b) $c=7, \quad v_a=5, \quad t_c=6$
    c) $c=6, \quad R=4, \quad v_a=5$
    d) $c=10, \quad \gamma=70° \ (110°), v_c=4$
    e) $a=7, \quad \alpha=40°, \quad r=2$

21. a) Konstruiraj trikotnik ABC s podatki $\beta=80°, r=2\,\text{cm}$ in $s_\beta=5.3$ cm. Pri tem je r radij trikotniku včrtane krožnice in s_β dolžina dela simetrale kota β znotraj trikotnika.
    b) Izračunaj preostala dva kota trikotnika ABC.

22. V trikotniku ABC naj bo I središče včrtane krožnice, I_A središče pričrtane krožnice, ki se dotika stranice a, in X presečišče simetrale kota α s stranico a.

    a) Kote trikotnika IBI_A izrazi s koti α, β, γ trikotnika ABC.
    b) Pri danem pravokotnem trikotniku IBI_A s pravim kotom pri oglišču B in pri dani točki $X \in I\,I_A$ konstruiraj prvotni trikotnik ABC.

23. V trikotniku ABC se težiščnici t_a in t_c sekata pod pravim kotom.
    a) Konstruiraj trikotnik, če je $t_c=9\,\text{cm}$ in $v_c=7\,\text{cm}$.
    b) Dokaži: $a^2+c^2=5b^2$.

24. Konstruiraj trikotnik ABC s podatki $r=3$ cm, $\gamma=60°$, $|IA|=5$ cm. (Točka I je središče, r pa radij včrtane krožnice.) Nato izračunaj kot α in stranico c tega trikotnika.

Eulerjeva premica, krožnica devetih točk

25. Konstruiraj trikotnik ABC, če so dane naslednje nekolinearne točke:
    a) A, G in H,
    b) O, C' (razpolovišče stranice c) in O_9 (središče krožnice devetih točk),
    c) O, H, D (nožišče višine na stranico c).

26. Kaj lahko rečemo o trikotniku ABC, če vemo, da razpolovišče C' stranice AB leži na Eulerjevi premici trikotnika.

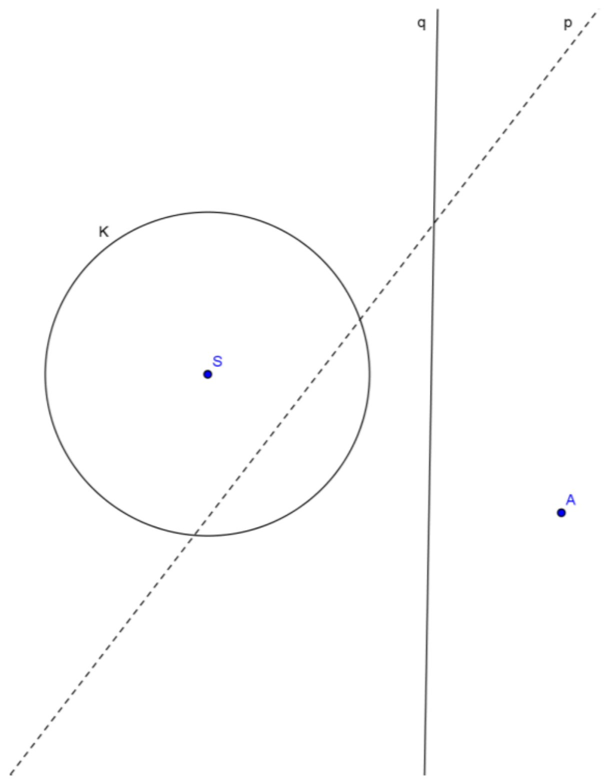
27. Dane so krožnica K s središčem S, premica p skozi točko S in točka A, ki leži na krožnici K, vendar ne leži na premici p.
    a) Konstruiraj vse pravokotne trikotnike ABC, za katere je K očrtana krožnica in p Eulerjeva premica.
    b) Konstruiraj vse enakokrake trikotnike ABC, za katere je K očrtana krožnica in p Eulerjeva premica.

28. V štirikotniku $ABCD$, ki je konveksen in ni tetiven, Eulerjeva premica trikotnika ABC sovpada z Eulerjevo premico trikotnika ACD. Dokaži:
    a) Skupna Eulerjeva premica obeh trikotnikov je ravno simetrala diagonale AC.
    b) Štirikotnik je deltoid, torej $|AB|=|BC|$ in $|AD|=|DC|$.

Potenca točke glede na krožnico. Višinska točka in očrtani krog. Simsonova premica. Ptolomejev izrek.

29. Dan je trikotnik ABC s stranicami a,b,c, očrtano krožnico K in razpoloviščem C' stranice AB. Naj bo X drugo presečišče krožnice K z nosilko težiščnice na stranico c. Izračunaj dolžino daljice $C'X$.

30. Na sliki so podane krožnica K, točka A ter premici p in q.
    a) Konstruiraj krožnico L_p skozi točko A tako, da bo premica p potenčna premica krožnic K in L_p.
    b) Konstruiraj krožnico L_q skozi točko A tako, da bo premica q potenčna premica krožnic K in L_q.
    (Namig: V primeru (b) si pomagaj s pomožno krožnico K', ki poteka skozi točko A in seka krožnico K.)



31. Dana je krožnica K in točki A, B znotraj nje. Konstruiraj krožnico L skozi točki A in B, ki se bo dotikala krožnice K.

32. V tetivnem štirikotniku $ABCD$ se diagonali sekata pod pravim kotom, kota $\angle DAB$ in $\angle CDA$ pa sta ostra.
    a) Dokaži, da sta $\angle ABC$ in $\angle BCD$ topa.
    b) Naj bosta M in N višinski točki trikotnikov ABD in ACD. Dokaži, da je štirikotnik $BCNM$ romb.
    c) Dokaži: če je štirikotnik $BCMN$ kvadrat, potem je štirikotnik $ABCD$ enakokraki trapez.

33. Dan je paralelogram $ABCD$. Krožnica skozi točko A seka daljice AB, AC, AD v točkah P, S, R. Dokaži, da velja $|AP|\cdot|AB|+|AR|\cdot|AD|=|AS|\cdot|AC|$.

34. Dokaži, da je ploščina tetivnega štirikotnika s stranicami *a, b, c* in *d*, ki je včrtan v krog z radijem *R*, enaka $K=\frac{1}{4R}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$.

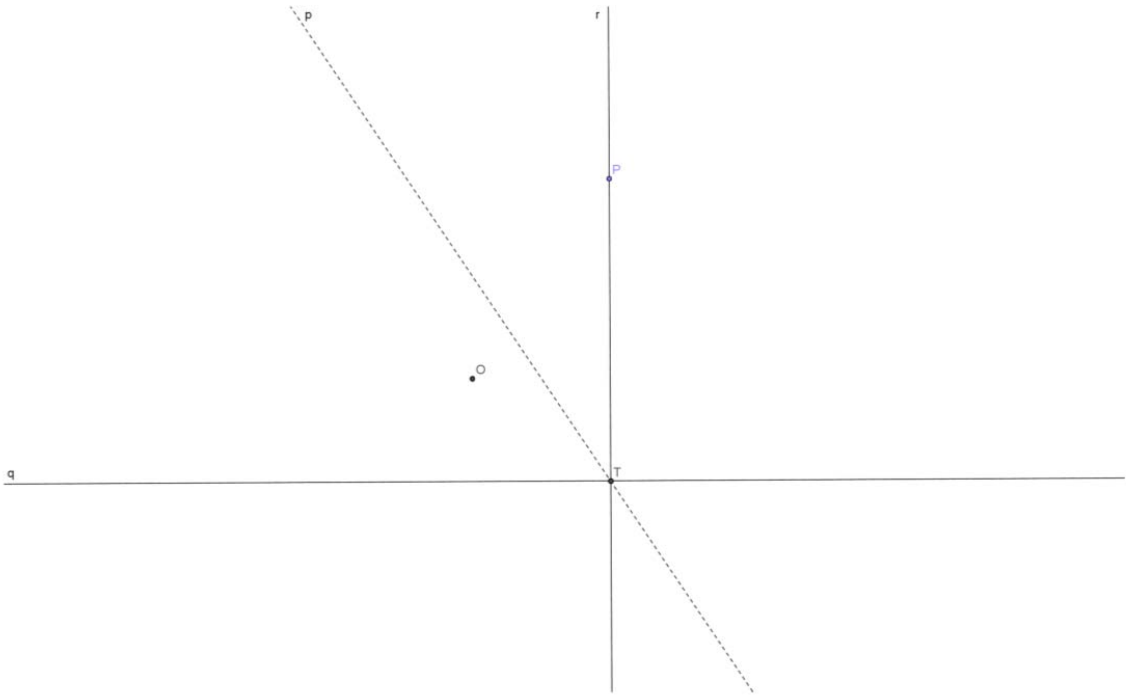
35. Naj bo *ABCD* tetivni štirikotnik, včrtan v krog *K* z radijem *R* in naj bo *AC* premer kroga *K*. Označimo kota: $\angle CAD=\alpha$, $\angle CAB=\beta$.
    a) S podatki α, β, R izrazi vse stranice in obe diagonali štirikotnika *ABCD*.

b) Zapiši Ptolomejev izrek za ta tetivni štirikotnik in ga uredi. Kateri znani obrazec dobiš?

36. Na sliki so premice p, q, r, ki se sekajo v točki T; premici q in r sta pravokotni. Poleg tega sta na sliki tudi točki $P \in r$ in O.

a) Konstruiraj trikotnik ABC, za katerega bo točka O središče očrtanega kroga, premica q nosilka stranice c, premica p pa Simsonova premica trikotnika ABC glede na točko P.

b) Bi bila naloga rešljiva tudi, če bi točka P ležala izven premice r?



37. Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik in naj bodo K_1, K_2, K_3 krožnice s premeri AB, AC in AD. Denimo, da se krožnici K_1 in K_2 razen v točki A sekata še v točki X, krožnici K_1 in K_3 še v točki Y, krožnici K_2 in K_3 pa še v točki Z. Dokaži, da so točke X, Y, Z kolinearne in opredeli premico, na kateri ležijo.

Štirikotniki

38. V konveksnem štirikotniku $ABCD$ s stranicami a, b, c, d in diagonalama e, f sta točki X in Y razpolovišči diagonal. Dokaži, da velja:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4 \cdot |XY|^2 .$$

(Namig: XY je težiščnica v trikotniku AYC).

Kaj dobimo v primeru, ko je $ABCD$ paralelogram?

39. Konstruiraj trapez s podatki: $a = 7, c = 2, d = 3, \beta = 30°$. Nato izračunaj dolžino preostale stranice *b*.

40. V enakokrakem trapezu *ABCD* z osnovnicama $a=|AB|$ in $c=|CD|$, krakom $b=|BC|$, kotom $\alpha = \angle DAB = \angle ABC$ in diagonalo $e=|AC|=|BD|$ velja: $a+b = 8$ cm, $\alpha = 50°$ in $e = 5$ cm.
   a) Konstruiraj enakokraki trapez *ABCD*.
   b) Izračunaj kot $\angle CAB$.

41. V trapezu z osnovnicama $a = 7, c = 2$ in krakoma $b = 5, d = 4$ se nosilki krakov sekata v točki *S*. Izračunaj dolžino daljice *BS*.

42.
   a) V trikotniku *ABC* sta *A'* in *B'* razpolovišči stranic *a* in *b*. Dokaži: Razpolovišča *X, Y, Z, W* stranic *AB*, *BA'*, *A'B'*, *B'A* so oglišča paralelograma, katerega ploščina znaša $\frac{3}{8}$ ploščine trikotnika *ABC*.
   b) Dokaži: paralelogram *XYZW* je romb natanko tedaj, ko je trikotnik *ABC* enakokrak.

44. Nad stranicami trikotnika *ABC* z zunanje strani konstruiramo enakostranične trikotnike *APB*, *CBQ* in *ACR*. Središča očrtanih krogov teh trikotnikov so točke O_1, O_2, O_3, ki so oglišča Napoleonovega trikotnika.
   a) Dokaži, da se nosilke daljic PO_1, QO_2, RO_3 sekajo v skupni točki.
   b) Dokaži, da se nosilke daljic AO_2, BO_3, CO_1 sekajo v skupni točki.

45. Nad stranicami trikotnika *ABC* z zunanje strani konstruiramo enakostranične trikotnike *APB*, *CBQ* in *ACR*. Očrtane krožnice teh treh trikotnikov se sekajo v točki, ki jo imenujemo *Fermatova točka* trikotnika *ABC* (oznaka *Fe*).
   a) Dokaži: $\angle AFeB = \angle BFeC = \angle CFeA = 120°$ (izogonalna lastnost).
   b) Dokaži: če ima točka *T* izogonalno lastnost, potem je *T*=*Fe*.
   c) Izračunaj kot $\angle AF_eQ$. Na tej podlagi opiši hitrejšo konstrukcijo Fermatove točke.
   d) Dokaži: med vsemi točkami *T* v ravnini je vsota $|AT| + |BT| + |CT|$ najmanjša, ko je $T = Fe$.

Kolinearnost

46. Stranice trikotnika PQR predstavljajo obzidje nekega posestva. Romeo, ki s starši živi na tem posestvu, ponoči skrivaj prepleza obzidje v točki R in se napoti po nosilki stranice PR v smeri stran od posestva, proti Juliji. Previdni oče je v točko E na petih sedminah daljice PQ postavil laser, ki sveti skozi vrata na razpolovišču stranice QR v noč. Ko Romeo zunaj obzidja prehodi 36 metrov, ga osvetli laser in sproži se alarm. Izračunaj, koliko je dolga stranica obzidja PR.

47. Naj bo ABC raznostranični trikotnik.
    a) Dokaži, da simetrala vsakega od zunanjih kotov trikotnika seka nosilko nasprotne stranice.
    b) Dokaži, da so presečišča zunanjih kotov trikotnika z nosilkami nasprotnih stranic kolinearne točke.

48. Krožnice K_1 in K_2, K_2 in K_3 ter K_1 in K_3 se od zunaj dotikajo v točkah A, B, C. Naj bodo S_1, S_2, S_3 središča krožnic K_1, K_2, K_3 in p nosilka središč S_1 in S_2. Naj bo q tista skupna tangenta krožnic K_1 in K_2, ki razdeli ravnino na dve polravnini tako, da vse tri krožnice ležijo v isti polravnini. Presečišče premic p in q označimo s T. Dokaži, da so točke B, C in T kolinearne. (Namig: trikotnik $S_1 S_2 S_3$.)

Transformacije

Izometrije

49. Dani sta koncentrični krožnici K in L s središčem S, v kolobarju med njima pa točka T. Določi točki $A \in K$ in $B \in L$ tako, da bo točka T razpolovišče daljice AB. Kdaj je naloga sploh rešljiva?

50. Dana je premica p, krožnici b in d, ki ležita vsaka na svojem bregu premice p, in točka $A \in p$. Konstruiraj romb $ABCD$, katerega oglišče C bo ležalo na premici p, oglišče B na krožnici b in oglišče D na krožnici d. V odvisnosti od lege krožnic ugotovi, koliko rešitev ima dana naloga.

51. Dane so točka A in premici b in c. Konstruiraj enakostranični trikotnik ABC z ogliščem B na premici b in ogliščem C na premici c. Koliko rešitev ima ta naloga?

52. Krožnici K_1 in K_2 se sekata v točkah A in B. Skozi točko A potegni premico tako, da bosta nastali dve tetivi na krožnicah enako dolgi.

53. V trikotniku ABC nad stranico BC konstruiramo kvadrat $BEFC$. Na sliki so dane daljica AB, krožnica K_C in premica p_E. Konstruiraj trikotnik ABC tako, da bo točka C ležala na krožnici K_C, točka E pa na premici p_E.

54. Dana je krožnica K in točka T zunaj kroga, ki ga krožnica omejuje. Konstruiraj enakostranični trikotnik ABC, katerega točki A in B ležita na krožnici K, njegovo težišče pa je točka T. Kdaj je naloga sploh rešljiva?

55. Konstruiraj krožnico, ki se bo dotikala danih dveh vzporednih premic p, q in bo potekala skozi dano točko T v pasu med vzporednicama.

56. Pri dani krožnici K s središčem O, točkah $A, B \in K$ in dani premici p skozi središče O konstruiraj točko $C \in K$ tako, da bo višinska točka H trikotnika ABC ležala na premici p.

Klasifikacija izometrij ravnine

57. Dan je trikotnik *ABC*. Nad stranicami *AB, BC* in *AC* z zunanje strani konstruiramo enakostranične trikotnike *APB, BQC* in *ACR*. Kompozitum treh rotacij ravnine za kot $60°$ okrog točk *A, C* in *B* označimo s τ: $\tau = R(B, 60°) \circ R(C, 60°) \circ R(A, 60°)$.
    a) Ugotovi, kam se s transformacijo τ preslikata točki C in P.
    b) Navedi dve izometriji ravnine, ki točki C in P preslikata enako kot izometrija τ.
    c) Določi transformacijo τ.

58. Naj bosta *A, B* dve točki v ravnini. Kateri izometriji ravnine je enak kompozitum $Z_A \circ Z_B$?

59. Naj bodo *p, q* in r tri premice, ki potekajo skozi skupno točko *S*. Kateri izometriji ravnine je enak kompozitum $Z_r \circ Z_q \circ Z_p$?

60. Naj bo α kot, ki meri več kot 0 in manj kot 180 stopinj, *S* točka v ravnini ter $\vec{v}$ neničelni vektor. Kateri izometriji ravnine je enak kompozitum $\rho(S,\alpha) \circ t_{\vec{v}}$?

61. Naj bosta ABC in $A'B'C'$ dva skladna trikotnika z isto orientacijo, pri čemer nosilki stranic *AB* in *A'B'* nista vzporedni. Dokaži, da obstaja rotacija $\rho(S,\varphi)$, ki trikotnik ABC preslika na trikotnik $A'B'C'$. Pra danih trikotnikih določi točko *S*.

Raztegi

62. Na premici *p* zaporedoma ležijo točke *X*, *A*, *Y*, *B*, za katere velja $|XA| = |AY| = |YB|$.
    a) Ugotovi, ali obstaja kaka izometrija ravnine, ki preslika $A \mapsto A$ in $B \mapsto Y$.
    b) Ugotovi, ali obstaja kak razteg, ki preslika $A \mapsto A$ in $B \mapsto Y$. Če obstaja, določi središče in koeficient raztega.
    c) Poišči vse izometrije ravnine, ki preslikajo $A \mapsto X$ in $B \mapsto Y$.
    d) Poišči vse izometrije ravnine, ki preslikajo $B \mapsto X$ in $A \mapsto Y$.

63. Dana je krožnica *K* s središčem *S* in radijem *r* ter točka *A* znotraj kroga, ki ga omejuje krožnica *K*. Določi geometrijsko mesto razpolovišč daljic *AX*, ko točka *X* preteče krožnico *K*.

64. Dani sta daljici dolžin *m* in *n*. Opiši, kako bi geometrijsko konstruirali sliko poljubne točke X z raztegom $\delta_{A,\frac{m}{n}}$?

65. Konstruiraj trikotnik s podatki: $\alpha = 40°, \beta = 80°, \ t_a = 7\text{cm}$.

66. Konstruiraj trikotnik s podatki: $\alpha = 40°$, $c : b = 5 : 3$, $R = 6$ cm.

67. Dani sta premici p in q, ki se sekata v točki S, in točka P, ki leži izven obeh premic. Konstruiraj krožnico K, ki se dotika obeh premic in poteka skozi točko P.

68. Konstruiraj krožnico, ki se bo dotikala dane premice p in bo potekala skozi dani točki A in B na istem bregu premice p.

69. Znotraj kota z vrhom V sta dani točki M in N. Konstruiraj dve vzporedni premici, vsako skozi eno od danih točk, da bo razmerje dolžin odsekov premic znotraj danega kota enako 1:3.

70. Na krožnici K s središčem O in radijem R sta dani točki A in B. Razpolovišče daljice AB označimo s C'. Za poljubno točko $C \in K$ označimo z G_C težišče trikotnika ABC. Dokaži, da točke G_C, $C \in K$, ležijo na neki krožnici. Določi središče in radij te krožnice.

71. Dokaži: vsaka podobnostna transformacija je kompozitum izometrije in raztega.

72. Ugotovi, ali držijo naslednje trditve:
   a) Vsaka podobnostna transformacija preslika premico v premico.
   b) Vsaka podobnostna transformacija preslika krožnico v krožnico.
   c) Vsaka podobnostna transformacija preslika premico v vzporedno premico.

74. V dani trikotnik ABC včrtaj dve krožnici z enakima radijema, da se bo vsaka dotikala dveh stranic trikotnika in druge krožnice.

Inverzija

75. Dani sta krožnici K_1 in K_2, ki se sekata v točkah *A* in *B*, ter točka *C* na krožnici K_1. Opiši, kako bi konstruirali krožnico *K*, ki se dotika krožnice K_2 in se dotika krožnice K_1 v točki *C*. Nalogo reši:
    a) z uporabo inverzije glede na neko krožnico s središčem v točki *C*.
    b) z uporabo inverzije glede na neko krožnico s središčem v točki B.

76. Dane so krožnica *K* in znotraj kroga, ki ga ta omejuje, dve točki *A* in *B*. Opiši, kako bi konstruirali krožnico *L*, ki poteka skozi točki *A* in *B* in se dotika krožnice *K*.

77. Krožnici K_1 in K_2 se dotikata od znotraj. Naj bo *U* poljubna točka med obema krožnicama. Opiši, kako bi konstruirali krožnico K_3, ki se dotika krožnic K_1 in K_2 ter poteka skozi točko *U*. Koliko rešitev ima ta naloga?

78. Opiši, kako bi konstruirali Paposovo verigo v arbelosu.

79. Na istem bregu premice *p* narišemo dve disjunktni krožnici K_1 in K_2, ki se premice *p* dotikata v točkah *A* in *B*. Opiši, kako bi konstruirali krožnico *L*, ki se dotika premice in obeh krožnic.

80. Dan je trikotnik *ABC*. Določi množici točk *S*, za katere velja, da inverzija glede na neko krožnico s središčem *S* preslika nosilke stranic trikotnika *ABC*
    a) v tri krožnice;
    b) v tri krožnice z enakimi radiji.

81. Naj bo K_1 trikotniku *ABC* včrtana krožnica.
    a) Konstruiraj krožnico K_2, ki se dotika krožnice K_1 ter stranic *c* in *b* trikotnika *ABC*.
    b) Konstruiraj krožnico K_2, ki se dotika krožnic K_1 in K_2 ter stranice *c*.

82. Dani so trikotnik *ABC*, krožnica K_1, ki se dotika stranice *b* v točki *X*, in točka $Y \in K_1$.
    a) Konstruiraj krožnico K_2, ki se dotika stranice *a* in se dotika krožnice K_1 v točki *Y*.
    b) Opiši, kako bi konstruirali krožnico K_3, ki se dotika stranice *c* in krožnic K_1 in K_2.

83. Dana je daljica *AB* dolžine *a*, točka *P* in kot z vrhom v točki *V*. Konstruiraj premico *p* skozi točko *P*, ki kraka kota seka v točkah *X* in *Y* tako, da velja $|PX|\cdot|PY| = a^2$.

84. Krožnici K_1 in K_2 s središčema S_1 in S_2 se sekata v točkah *A* in *B*. Dokaži: inverzija *I* glede na krožnico s središčem v točki *A* in radijem *R* preslika nosilko $n(S_1S_2)$ v krožnico s središčem *B'=I(B)*.