Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 2. 4. 2002

1. Reši matrično enačbo $A^2X = AC - 2AX$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
in izračunaj X^{2n}, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

2. Naj bo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ vektorski prostor realnih zveznih funkcij. Preslikava $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{F}\,(f)\,(x) = a\,(f(x) + f(-x))\,,$ kjer je $a \in \mathbb{R}$ neničelna konstanta.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{F}$ linearna preslikava.
   (b) Določi vektorska podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{F}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{F}$.
   (c) Določi konstanto a tako, da bo $\mathcal{F}$ projektor.

3. Naj bosta p in q premici v prostoru $\mathbb{R}^3$, ki ju določata enačbi:
$$p : x = y = z \quad \text{in} \quad q : 3x = -6y = 2z.$$
Označimo z Σ ravnino, ki vsebuje premici p in q.
   (a) Zapiši matriko A oz. matriko B, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ pripada zrcaljenju čez ravnino Σ oz. premico p.
   (b) Za katere točke $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ velja $A\overrightarrow{x} = B\overrightarrow{x}$? Kaj geometrijsko predstavlja ta množica?

4. Za katero realno število a je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3-a & 2-a \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{bmatrix}$$
podobna diagonalni matriki? V tem primeru določi tudi ustrezno diagonalno in prehodno matriko.

Naloge so enakovredne.